Б. П. 吉米多维奇

数学分析

习题全解 4

原题译自俄文第13版

最新校订本

南京大学数学系

廖良文 许 宁 编著

级 数

A·P·G 安徽出版集团

安徽人民出版社

ANHUI PEOPLE'S PUBLISHING HOUSE

责任编辑／王玉法　封面设计／王国亮

经典名著最新版本

全书增补数百新题

题型最全题量最大

数学名家详细解析

吉米多维奇数学分析习题全解（一）——分析引论

吉米多维奇数学分析习题全解（二）——一元函数的微分学

吉米多维奇数学分析习题全解（三）——不定积分　定积分

吉米多维奇数学分析习题全解（四）——级数

吉米多维奇数学分析习题全解（五）——多元函数的微分学　带参数的积分

吉米多维奇数学分析习题全解（六）——重积分和曲线积分

吉米多维奇数学分析习题全集


ISBN 978-7-212-02698-1
9 787212 026981 >
定价：20.00 元

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析
习题全解
(四)

南京大学数学系
廖良文　许　宁　编著
毕秉钧　译

安徽人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇数学分析习题全解.4/(苏)吉米多维奇著.廖良文,许宁编著.—合肥:安徽人民出版社,2005

ISBN 978—7—212—02698—1

Ⅰ.吉… Ⅱ.①吉…②廖…③许… Ⅲ.数学分析—高等学校—解题 Ⅳ.017—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 113597 号

吉米多维奇数学分析习题全解(四)

(苏)吉米多维奇 著 廖良文 许 宁 编著 毕秉钧 译

责任编辑 王玉法 **封面设计** 王国亮

出版发行 安徽人民出版社

地　　址 合肥市政务文化新区圣泉路 1118 号出版传媒广场

邮编:230071

发 行 部 0551—3533258　0551—3533292(传真)

经　　销 新华书店

印　　刷 南京新洲印刷有限公司

开　　本 880×1230　1/32　**印张**　14　**字数**　320 千

版　　次 2010 年 1 月第 3 版(最新校订本)

标准书号 ISBN978—7—212—02698—1

定　　价 20.00 元

前　言

数学分析是大学数学系的一门重要必修课，是学习其它数学课的基础。同时，也是理工科高等数学的主要组成部分。

吉米多维奇著的《数学分析习题集》是一本国际知名的著作，它在中国有很大影响，早在上世纪五十年代，国内就出版了该书的中译本。安徽人民出版社翻译出版了新版的吉米多维奇《数学分析习题集》，以俄文第 13 版（最新版本）为基础，新版的习题集在原版的基础上增加了部分新题，共计有五千道习题，数量多，内容丰富，包括了数学分析的全部主题。部分习题难度较大，初学者不易解答。为了给广大高校师生提供学习参考，应安徽人民出版社的同志邀请，我们为新版的习题集作解答。本书可以作为学习数学分析过程中的参考用书。

众所周知，学习数学，做练习题是一个很重要的环节。通过做练习题，可以巩固我们所学到的知识，加深我们对基础概念的理解，还可以提高我们的运算能力，逻辑推理能力，综合分析能力。所以，我们希望读者遇到问题一定要认真思考，努力找出自己的解答，不要轻易查抄本书的解答。

廖良文编写了第一、二、三、四及八章习题的解答，许宁编写了第六、七章习题的解答。本书的编写过程中，我们参考了国内的一些数学分析教科书及已有的题解，在许多方面得到了启发，谨对原书的作者表示感谢，在此，不再一一列出。

本书自出版以来受到广大高校师生的高度肯定，深受读者喜爱，畅销不衰。此次再版，我们纠正了前一版中存在的个别错误，对版面进行了适当调整。在此对为此书付出辛勤劳动的各位老师表示深切的谢意！

由于我们水平有限，错误和缺点在所难免。欢迎读者批评指正。

编　者

目　录

第五章　级　数

§1. 数值级数　同号级数收敛性的判别法

1. **一般概念**　对于数值级数：$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$①

若存在有穷极限：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S\text{(级数的和)}$$

其中　$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，

则级数①称为收敛的，反之，级数①称为发散的.

2. **柯西准则**　级数①收敛，充要条件是：对于任何 $\varepsilon>0$ 都存在 $N=N(\varepsilon)$，使得当 $n>N$ 和 $p>0$（n 和 p 为自然数）时，下列不等式成立

$$|S_{n+p}-S_n|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}a_i\right|<\varepsilon,$$

特别是若级数收敛，则 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

3. **比较判别法1**　除级数①之外，设有以下级数：

$$b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots. \quad ②$$

若当 $n\geqslant n_0$ 时，以下不等式成立：

$$0\leqslant a_n\leqslant b_n,$$

则(1) 由级数②的收敛可推出级数①的收敛；(2) 由级数①的发散可推出级数②的发散.

特别是当 $n\to\infty$ 时，若 $a_n\sim b_n$，则正项级数①和②同时收敛或同时发散.

4. **比较判别法 2**　设

$$a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right) I^{①},$$

则(1) 当 $p > 1$ 时,级数 ① 收敛;(2) 当 $p \leqslant 1$ 时级数 ① 发散.

5. **达朗贝尔判别法**　若

$$a_n > 0 \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

且
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

则(1) 当 $q < 1$ 时,级数 ① 收敛;(2) 当 $q > 1$ 时级数 ① 发散.

6. **柯西判别法**　若

$$a_n \geqslant 0 \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

且
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

则(1) 当 $q < 1$ 时,级数 ① 收敛;(2) 当 $q > 1$ 时级数 ① 发散.

7. **拉阿比判别法**　若

$$a_n > 0 \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

且
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = p,$$

则(1) 当 $p > 1$ 时,级数 ① 收敛;(2) 当 $p < 1$ 时级数 ① 发散.

8. **高斯判别法**　若

$$a_n > 0 \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

且
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

其中 $|\theta_n| < C$,而 $\varepsilon > 0$,则(1) 当 $\lambda > 1$ 时,级数 ① 收敛;(2) 当 $\lambda < 1$ 时级数 ① 发散;(3) 当 $\lambda = 1$ 时,若 $\mu > 1$,级数 ① 收敛,若 $\mu \leqslant 1$ 则发散.

9. **柯西积分判别法**　若 $f(x)(x \geqslant 1)$ 为非负递减连续函数,则级数:$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ 同时收敛或同时发散.

---

① 符合 O^* 的意义见第 1 章第 6 节 1.

直接证明下列级数的收敛性并求出它们的和(2546～2552).

【2546】 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\cdots$.

证　由

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}=\frac{1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}},$$

又　$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0,$$

所以　$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}.$$

故该级数收敛,其和为$\frac{2}{3}$.

【2547】 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$.

证　由

$$\begin{aligned}S_n&=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)\\&=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}\\&=1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right),\end{aligned}$$

有　$$\lim_{n\to\infty}S_n=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

故该级数收敛,其和为$\frac{3}{2}$.

【2548】 $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\cdots$.

证 由 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$,

有 $$2S_n=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}},$$

于是
$$\begin{aligned}S_n&=2S_n-S_n\\&=1+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{5}{2^2}-\frac{3}{2^2}\right)+\cdots\\&\quad+\left(\frac{2n-1}{2^{n-1}}-\frac{2n-3}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}\\&=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\\&=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}.\end{aligned}$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2^n}=0,\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0,$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}S_n=1+2=3.$$

故该级数收敛,其和为 3.

【2549】 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n+1)}+\cdots.$

证 因

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\\&\quad+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

有 $$\lim_{n\to\infty}S_n=1.$$

故该级数收敛,其和为 1.

【2550】 $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots.$

证 由

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)},$$

考察通项

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right],$$

有
$$S_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right),$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}.$$

故该级数收敛,其和为$\frac{1}{3}$

【2551】 (1) $q\sin\alpha+q^2\sin 2\alpha+\cdots+q^n\sin n\alpha+\cdots$;

(2) $q\cos\alpha+q^2\cos 2\alpha+\cdots+q^n\cos n\alpha+\cdots(|q|<1)$.

证 令 $z=q(\cos\alpha+i\sin\alpha)$,

其中 i 为虚数单位.

而
$$z^n=q^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha),$$

于是有
$$\sum_{j=1}^{n}z^j=\sum_{j=1}^{n}q^j(\cos j\alpha+i\sin j\alpha)=\sum_{j=1}^{n}q^j\cos j\alpha+i\sum_{j=1}^{n}q^j\sin j\alpha.$$

令
$$S_n^{(1)}=q\sin\alpha+q^2\sin 2\alpha+\cdots+q^n\sin n\alpha,$$
$$S_n^{(2)}=q\cos\alpha+q^2\cos 2\alpha+\cdots+q^n\cos n\alpha,$$

有
$$\sum_{j=1}^{n}z^j=S_n^{(2)}+iS_n^{(1)}.$$

而 $\sum_{j=1}^{n} z^j = \frac{z(1-z^n)}{1-z}$,

因为 $|q|<1$,

故有 $|z|<1$,

所以 $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$.

所以 $\lim_{n\to\infty}(S_n^{(2)} + iS_n^{(1)}) = \frac{z}{1-z} = \frac{q\cos\alpha - q^2 + iq\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}$.

故 $\lim_{n\to\infty} S_n^{(2)} = \frac{q\cos\alpha - q^2}{1-2q\cos\alpha+q^2}$,

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2},$$

所以(1),(2)级数收敛,其和分别是 $\frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}$, $\frac{q\cos\alpha-q^2}{1-2q\cos\alpha+q^2}$.

【2552】 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

证 因

$$\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n} = (\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}),$$

有

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}) \\ &= [(\sqrt{3}-\sqrt{2})-(\sqrt{2}-\sqrt{1})] \\ &\quad +[(\sqrt{4}-\sqrt{3})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})] \\ &\quad +[(\sqrt{5}-\sqrt{4})-(\sqrt{4}-\sqrt{3})]+\cdots \\ &\quad +[(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})] \\ &= \sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-\sqrt{2}+1 \\ &= 1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}. \end{aligned}$$

故有 $\lim_{n\to\infty} S_n = 1-\sqrt{2}$.

所以该级数收敛，其和是 $1-\sqrt{2}$.

【2553】 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的收敛性.

提示：证明当 $x\neq k\pi$（k 为整数）时，使得在 $n\to\infty$ 时 $\sin nx\to 0$ 不可能.

证 当 $x=k\pi$，k 为整数，有 $\sin k\pi=0$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nk\pi=0$，收敛.

当 $x\neq k\pi$ 时，我们证明 $\sin nx\not\to 0$.

反证法，设 $\sin nx\to 0$，于是有 $\sin(n+1)x\to 0$.

而 $$\sin(n+1)x=\sin nx\cos x+\cos nx\sin x$$

因 $x\neq k\pi$，有 $\sin x\neq 0$

于是有 $$0=\lim_{n\to\infty}\sin(n+1)x$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\sin nx\cos x)+\lim_{n\to\infty}(\cos nx\sin x)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\cos nx\sin x),$$

我们有 $$\lim_{n\to\infty}\cos nx=0.$$

又 $$\cos^2nx+\sin^2nx=1(*),$$

对（*）两边取关于 n 的极限有
$$1=\lim_{n\to\infty}\cos^2nx+\lim_{n\to\infty}\sin^2nx=0,$$

矛盾.

所以 $\sin nx\not\to 0, n\to\infty, x\neq k\pi$,

于是我们有 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$，当 $x=k\pi$，k 为整数时，收敛，当 $x\neq k\pi$，k 为整数时发散.

【2554】 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则把该级数的各项重新组合且不破坏其先后次序所得的级数：$\sum_{n=1}^{\infty}A_n$，其中

$$A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \qquad (p_1 = 1, p_1 < p_2 < \cdots),$$

也收敛并具有同样的和.反之是不正确的,举例说明.

证 记$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$的前n项和为t_n,有

$$\begin{aligned} t_n &= A_1 + A_2 + \cdots + A_n \\ &= \sum_{i=p_1}^{p_2-1} a_i + \sum_{i=p_2}^{p_3-1} a_i + \cdots + \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \\ &= \sum_{i=1}^{p_{n+1}-1} a_i = S_{p_{n+1}-1}, \end{aligned}$$

由$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛,所以$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} S_{p_{n+1}-1}$存在.

于是$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$收敛且与$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$和相同.

又$2-2+2-2+\cdots$发散,但$(2-2)+(2-2)+(2-2)+\cdots$收敛,所以各项重新组合后收敛,但原级数不一定收敛.

【2555】 证明:设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的各项是正值,若将该级数各项重新组合结果所得出的级数$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$收敛,则该级数也收敛.

证 令

$$t_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n,$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, a_n \geqslant 0, \forall n.$$

于是有$\lim_{n\to\infty} t_n$存在,所以$\{t_n\}$是有界数列.因此,对给定的n,存在p_n,使得$S_n < t_{p_n} < M$,M为一常数,又S_n单调上升,所以$\lim_{n\to\infty} S_n$存在,故该级数也收敛.

研究下列级数的收敛性(2556 ~ 2664).

【2556】 $1-1+1-1+1-1+\cdots$.

解 因级数的通项为$a_n = (-1)^{n+1}$,于是$\lim_{n\to\infty} a_n$不存在,所以

该级数发散.

【2557】 $0.001+\sqrt{0.001}+\sqrt[3]{0.001}+\cdots$.

解 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{0.001}=1$，所以该级数发散.

【2558】 $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1,$$

所以该级数收敛.

【2559】 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$.

解法一 我们有如下定理：

设 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots\geqslant 0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充要条件是 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^k a_{2^k}=a_1+2a_2+4a_4+8a_8+\cdots$ 收敛.

于是有 $$\sum_{k=0}^{\infty}2^k a_{2^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{2\cdot 2^k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{2^{k+1}-1},$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^k}{2^{k+1}-1}=\frac{1}{2},$$

所以$\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^k a_{2^k}$ 发散，于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 发散.

解法二 由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散而$\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}>0$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 发散.

【2560】 $\frac{1}{1001}+\frac{1}{2001}+\frac{1}{3001}+\cdots+\frac{1}{1000n+1}+\cdots$.

解 因为$\frac{1}{1000n+1}>\frac{1}{1000(n+1)}$,

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1000(n+1)}$发散,所以该级数发散.

【2561】 $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\cdots+\frac{n}{2n-1}+\cdots$.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2},$$

所以该级数发散.

【2562】 $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots$.

解 因为$a_n=\frac{1}{(2n-1)^2}$,

而 $$2^k a_{2^k}=\frac{2^k}{(2\cdot 2^k-1)^2}=\frac{1}{2^k(2-2^{-k})^2},$$

又 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{k+1}(2-2^{-k-1})^2}}{\frac{1}{2^k(2-2^{-k})^2}}=\frac{1}{2}<1,$$

所以$\sum_{k=0}^{\infty}2^k a_k$收敛,即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$收敛.

【2563】 $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\cdots$.

解 因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$当$p>1$时收敛,

而 $$\frac{1}{n\sqrt{n+1}}<\frac{1}{n\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛. 所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$收敛.

【2564】 $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}+\cdots$.

解 因为

$$\sqrt{(2n-1)(2n+1)}<\sqrt{(2n+1)^2}=2n+1<2(n+1),$$

所以 $$\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}>\frac{1}{2(n+1)}.$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2(n+1)}$发散，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$发散.

【2565】 证明：等差级数各项倒数组成的级数是发散的.

证 设等差级数为$\sum_{n=1}^{\infty}(a+(n-1)\mathrm{d})$，d 为公差.

当 $\mathrm{d}>0$ 时，存在 $n_0>0$，有$(n_0-1)\mathrm{d}>a$，于是当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $$2(n-1)\mathrm{d}>a+(n-1)\mathrm{d},$$

从而 $$\frac{1}{a+(n-1)\mathrm{d}}>\frac{1}{2(n-1)\mathrm{d}}>\frac{1}{2n\mathrm{d}}>0,$$

因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a+(n-1)\mathrm{d}}$发散.

当 $\mathrm{d}=0$ 时，$a\neq 0$，此时级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a}$发散.

当 $\mathrm{d}<0$ 时，与 $\mathrm{d}>0$ 时级数敛散性等价，故 $\mathrm{d}<0$ 时级数发散，因此，等差级数各项倒数的级数是发散的.

【2566】 证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(A)$及$\sum_{n=1}^{\infty}b_n(B)$收敛，且$a_n\leqslant c_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}c_n(C)$也收敛. 若级数$(A)$和$(B)$是发散的，则级数$(C)$的收敛性会怎样？

证 因为 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$，

所以 $$0\leqslant c_n-a_n\leqslant b_n-a_n,n=1,2,\cdots.$$

又$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$收敛. 于是有$\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

若级数(A)和(B)皆发散，则级数(C)可能收敛，也可能发散如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right)$发散.

但当$c_n=0$时，$n=1,2,\cdots$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$收敛，当$c_n=\frac{1}{n}$时，$n=1,2,\cdots$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$发散.

【2567】 假定已知两个具非负项的发散级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$，下列级数的收敛性如何？

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\min(a_n,b_n)\ \text{及}(2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\max(a_n,b_n).$$

解 (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\min(a_n,b_n)$可能收敛，也可能发散.

如 $a_n=\frac{1}{n},b_n=\frac{1}{n+1},n=1,2,\cdots,$

有 $\min(a_n,b_n)=\frac{1}{n+1},$

知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$发散，又

$$a_n=\frac{1+(-1)^n}{3},b_n=\frac{1-(-1)^n}{3},$$

知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n,\lim\limits_{n\to\infty}b_n$皆不存在，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\min(a_n,b_n)=0+0+\cdots$收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\max(a_n,b_n)$发散.

事实上 $\max(a_n,b_n)\geqslant a_n\geqslant 0,$

又已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\max(a_n,b_n)$发散.

【2568】 证明：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(a_n\geqslant 0)$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$也

收敛. 反之是不正确的，举例说明.

证　因为 $a_n \geqslant 0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，

所以　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

于是存在 M，当 $n > M$ 时，$0 \leqslant a_n < 1$，因此当 $n > M$ 时，$0 \leqslant a_n^2 < a_n$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，反之不成立，例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

【2569】　证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 也收敛.

证　因为

$$0 \leqslant |a_n b_n| \leqslant \frac{a_n^2 + b_n^2}{2},$$

而 $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$，$\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛，于是有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$ 收敛. 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛. 又

$$(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n,$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛，故有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ 收敛.

因为　$$\frac{|a_n|}{n} \leqslant \frac{a_n^2 + \frac{1}{n^2}}{2},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 收敛.

【2570】　证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = a \neq 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证　(1) 设 $a > 0$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = a$，所以存在 $M > 0$，当 $n > M$ 时有

$$na_n > \frac{a}{2},$$

即 $$a_n > \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{n}, n > M.$$

而$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{2} \frac{1}{n}$发散,所以$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散.

(2) 设$a < 0$,取$\varepsilon_0 > 0$,使得$a + \varepsilon_0 < 0$,由于

$$\lim_{n \to \infty} na_n = a,$$

所以存在$N > 0$,当$n > N$时,有

$$na_n < a + \varepsilon_0,$$

即 $$\frac{1}{n} < \frac{1}{a + \varepsilon_0} a_n.$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a + \varepsilon_0} a_n$发散,因此$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散.

【2571】 证明:若各项为正且其值单调递减项的级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛,则$\lim_{n \to \infty} na_n = 0$.

证 因为$a_n \geqslant 0, n = 1, 2, \cdots$,且$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \cdots$,并设$S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$,于是任取$N$,当$n > N$时,有

$$(n - N)a_n \leqslant a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_n < S - S_N,$$

故 $$na_n < \frac{n}{n - N}(S - S_N).$$

因为 $$\lim_{N \to \infty} S_N = S,$$

且 $$0 \leqslant S_N < S,$$

于是任给$\varepsilon > 0$,存在N_0,使得

$$S - S_{N_0} < \varepsilon,$$

又 $$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n - N_0} = 1,$$

于是存在n_0,当$n > n_0$时,有

$$\frac{n}{n-N_0}<\frac{3}{2}.$$

现取　　$M=\max\{N_0,n_0\}$，

于是当 $n\geqslant M$ 时有

$$0\leqslant na_n<\frac{3}{2}\varepsilon,$$

所以　　$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

【2572】　若当 $p=1,2,3\cdots$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0$$

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是收敛的吗？

解　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 不一定收敛.

我们知道，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，由柯西准则一定有

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0,p=1,2,3,\cdots.$$

但当 $p=1,2,3,\cdots$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0,$$

不能推得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，如令 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$，于是

$$0<a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+p}}<\frac{p}{\sqrt{n+1}},$$

又　　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p}{\sqrt{n+1}}=0,\forall p\in IN,$

故对一切 p 有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0$.

但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散.

利用柯西准则，证明下列级数的收敛性(2573 ～ 2575).

【2573】 $a_0+\frac{a_1}{10}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\cdots(|a_n|<10)$.

证 $\forall m\in IN$,

$$|S_{n+m}-S_n|=\left|\frac{a_n}{10^n}+\frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}+\cdots+\frac{a_{n+m-1}}{10^{n+m-1}}\right|$$
$$\leqslant\frac{|a_n|}{10^n}+\frac{|a_{n+1}|}{10^{n+1}}+\cdots+\frac{|a_{n+m-1}|}{10^{n+m-1}}$$
$$\leqslant\frac{1}{10^{n-1}}+\frac{1}{10^n}+\cdots+\frac{1}{10^{n+m-2}}$$
$$=\frac{1}{10^{n-1}}\left(1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^{m-1}}\right)$$
$$<\frac{1}{10^{n-1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{9\cdot10^{n-2}},$$

任给 $\varepsilon>0$,由 $\frac{1}{9\cdot10^{n-2}}<\varepsilon$,有 $n>2-\lg9\varepsilon$.

取 $N=[2-\lg9\varepsilon]$,则当 $n>N$ 时,有

$$|S_{n+m}-S_n|<\varepsilon,\forall m\in IN,$$

故该级数收敛.

【2574】 $\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin2x}{2^2}+\cdots+\frac{\sin nx}{2^n}+\cdots$.

证 $\forall m\in IN$,

因为 $|S_{n+m}-S_n|$

$$=\left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{\sin(n+m)x}{2^{n+m}}\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+m}}=\frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right)$$
$$<\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

$\forall\varepsilon>0$,由 $\frac{1}{2^{n-1}}<\varepsilon$,有 $n>1-\log_2\varepsilon$,今取 $N=[1-\log_2\varepsilon]$

于是当 $n>N$ 时,有

$$|S_{n+m}-S_n|<\varepsilon,\forall m\in IN,$$

故该级数收敛.

【2575】 $\dfrac{\cos x-\cos 2x}{1}+\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{2}+\cdots$

$$+\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}+\cdots.$$

证 $\forall m\in IN$,

$$\begin{aligned}
&|S_{n+m}-S_n|\\
&=\left|\frac{\cos(n+1)x-\cos(n+2)x}{n+1}+\frac{\cos(n+2)x-\cos(n+3)x}{n+2}\right.\\
&\quad\left.+\cdots+\frac{\cos(n+m)x-\cos(n+m+1)x}{n+m}\right|\\
&=\left|\frac{\cos(n+1)x}{n+1}+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)\cos(n+2)x\right.\\
&\quad+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+2}\right)\cos(n+3)x+\cdots\\
&\quad\left.+\left(\frac{1}{n+m}-\frac{1}{n+m-1}\right)\cos(n+m)x-\frac{\cos(n+m+1)x}{n+m}\right|\\
&\leqslant\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\\
&\quad+\cdots+\left(\frac{1}{n+m-1}-\frac{1}{n+m}\right)+\frac{1}{n+m}\\
&=\frac{2}{n+1},
\end{aligned}$$

$\forall\varepsilon>0$,由 $\dfrac{2}{n+1}<\varepsilon$,有 $n>\dfrac{2}{\varepsilon}-1$.

取 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}-1\right]$,

于是当 $n>N$ 时,有

$$|S_{n+m}-S_n|<\varepsilon,\forall m\in IN.$$

故该级数收敛.

【2575.1】 $\dfrac{\cos x}{1^2}+\dfrac{\cos x^2}{2^2}+\cdots+\dfrac{\cos x^n}{n^2}+\cdots.$

提示：利用不等式：

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\qquad (n=2,3,\cdots).$$

解 由

$$\begin{aligned}|S_{n+m}-S_n| &= \left|\frac{\cos x^{n+1}}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{\cos x^{n+m}}{(n+m)^2}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+m)^2} \\ &< \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots \\ &\quad +\frac{1}{(n+m-1)(n+m)} \\ &= \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) \\ &\quad +\cdots+\left(\frac{1}{n+m-1}-\frac{1}{n+m}\right) \\ &= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+m}<\frac{1}{n},\end{aligned}$$

于是对 $\forall \varepsilon>0$，令 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，

有 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，所以当 $n>N$ 时，对 $\forall m\in IN$，有 $|S_{n+m}-S_n|<\varepsilon$ 因此该级数收敛.

利用柯西准则，证明下列级数的发散性(2576 ～ 2577).

【2576】 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots.$

证 令 $\varepsilon_0=\frac{1}{3}$，$\forall n\in IN$，

由
$$\begin{aligned}|S_{2n}-S_n| &= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} \\ &> \underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n\text{项}}=\frac{1}{2}>\frac{1}{3},\end{aligned}$$

故该级数发散.

【2577】 $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$.

证 令 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{6}$，$\forall n\in IN$，

由 $$|S_n-S_{3n}|=\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}+\frac{1}{3n+5}-\frac{1}{3n+6}+\cdots+\frac{1}{6n-2}+\frac{1}{6n-1}-\frac{1}{6n}$$
$$>\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+3}-\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+6}+\frac{1}{3n+6}-\frac{1}{3n+6}+\cdots+\frac{1}{6n}+\frac{1}{6n}-\frac{1}{6n}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$
$$>\frac{1}{3}(\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n\text{项}})=\frac{1}{6}>\varepsilon_0,$$

故该级数发散.

【2577.1】 $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\cdots$.

证 取 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$，

由 $|S_{2n+1}-S_n|$
$$=\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}}$$
$$>\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+2}>\underbrace{\frac{1}{2n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+2}}_{n+1\text{ 项}}$$
$$=\frac{n+1}{2n+2}=\frac{1}{2}>\varepsilon_0,\ \forall n\in IN.$$

故该级数发散.

利用比较、达朗贝尔或柯西判别法，研究以下级数的收敛性(2578～2590).

【2578】 $\dfrac{1000}{1!}+\dfrac{1000^2}{2!}+\dfrac{1000^3}{3!}+\cdots+\dfrac{1000^n}{n!}+\cdots.$

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1000^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{1000^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1000}{n+1}=0<1,$$

所以该级数收敛.

【2579】 $\dfrac{(1!)^2}{2!}+\dfrac{(2!)^2}{4!}+\cdots+\dfrac{(n!)^2}{(2n!)}+\cdots.$

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{4}<1,$$

故该级数收敛.

【2580】 $\dfrac{1!}{1}+\dfrac{2!}{2^2}+\dfrac{3!}{3^3}+\cdots+\dfrac{n!}{n^n}+\cdots.$

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=e^{-1}<1,$$

故该级数收敛.

【2581】 (1) $\dfrac{2\cdot 1!}{1}+\dfrac{2^2\cdot 2!}{2^2}+\dfrac{2^3\cdot 3!}{3^3}+\cdots+\dfrac{2^n n!}{n^n}+\cdots;$

(2) $\frac{3\cdot1!}{1}+\frac{3^3\cdot2!}{2^2}+\frac{3^3\cdot3!}{3^3}+\cdots+\frac{3^n n!}{n^n}+\cdots$.

解　(1) 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot n^n}{(n+1)^n}=\frac{2}{e}<1,$$

故该级数收敛.

(2) 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot n^n}{(n+1)^n}=\frac{3}{e}>1,$$

故该级数发散.

【2582】　$\frac{(1!)^2}{2}+\frac{(2!)^2}{2^4}+\frac{(3!)^2}{2^9}+\cdots+\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}+\cdots$.

解　因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{(n!)}{2^{n^2}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}=0<1,$$

故该级数收敛.

【2583】　$\frac{1000}{1}+\frac{1000\cdot1001}{1\cdot3}+\frac{1000\cdot1001\cdot1002}{1\cdot3\cdot5}+\cdots$.

解　因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1000\cdot 10001\cdots(1000+n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}}{\dfrac{1000\cdot 10001\cdots(1000+n-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1000+n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1,$$

故该级数收敛.

【2584】 $\frac{4}{2}+\frac{4\cdot 7}{2\cdot 6}+\frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10}+\cdots.$

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{4\cdot 7\cdots(3n+4)}{2\cdot 6\cdots(4n+2)}}{\dfrac{4\cdot 7\cdots(3(n-1)+4)}{2\cdot 6\cdots(4(n-1)+2)}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{4n+2}=\frac{3}{4}<1,$$

故该级数收敛.

【2585】 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}).$

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[2n+3]{2})=\sqrt{2}-1<1,$$

故该级数收敛.

【2585.1】 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,式中

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & 若\ n=m^2,\\[2mm] \dfrac{1}{n^2}, & 若\ n\neq m^2\end{cases}\qquad (m\ 为自然数).$$

解 令$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 对应部分和为 S_n,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 对应的部分和为 t_n 而 $S_n<2t_n$,$\forall n$,又$\lim\limits_{n\to\infty}t_n$ 存在,故该级数收敛.

【2582.2】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}$.

解　$x=0$ 时，该级数显然收敛，现考察 $x \neq 0$，因为

$$|a_n| = \left| nx \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha} \right| \leqslant \frac{n|x|}{(1+x^2)^n},$$

令　$b_n = \frac{n|x|}{(1+x^2)^n}$,

而
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)|x|}{(1+x^2)^{n+1}}}{\frac{n|x|}{(1+x^2)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} < 1,$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n|x|}{(1+x^2)^n}$ 收敛，所以由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛，于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

【2586】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$.

解　因为

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1,$$

故该级数收敛.

【2587】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

解　因为

$$a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} \geqslant \frac{n^n \cdot n^{\frac{1}{n}}}{(n+1)^n} = \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 0,$$

令 $$b_n = \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},$$

有 $$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{e} \neq 0.$$

于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$ 发散.

【2588】 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$.

解 因为 $n > 1$ 时，$\ln n < n$，故

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n}} > 0,$$

而 $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

故级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 发散，所以 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$ 发散.

【2589】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{n+\frac{1}{2}}}$.

解 因为 $n > 1$ 时

$$0 < \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}} < \frac{n^{n-1}}{(n^2+2n+1)^{\frac{n+1}{2}}} < \frac{n^{n-1}}{n^{n+1}} = \frac{1}{n^2},$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$ 收敛.

【2589.1】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$.

解　令

$$a_n=\frac{n^5}{2^n+3^n},b_n=\frac{n^5}{2\cdot 2^n},n\geqslant 1,$$

于是有　$b_n>a_n>0,n\geqslant 1,$

而　$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^5}{2\cdot 2^{n+1}}}{\frac{n^5}{2\cdot 2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5=\frac{1}{2}<1.$$

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n}$ 收敛.

【2589.2】　$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

解　令

$$a_n=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}>0,n\geqslant 2,$$

因为$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1+\frac{2}{n-1}}\right]^{n-1}$$

$$=\frac{1}{e^2}<1,$$

故该级数收敛.

【2590】　$\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

$$+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\cdots.$$

提示:$\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}$.

解　因为$\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}=2\sin\frac{\pi}{4}$,

于是　$$\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)}=2\sin\frac{\pi}{8},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}}$$
$$=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{8}}=2\sin\frac{\pi}{16},$$

由数学归纳法知通项

$$a_n=2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}},$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}<1,$$

于是该级数收敛.

【2591】 证明:若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q\quad(a_n>0).$$

则 $a_n=o(q_1^n)$,其中 $q_1>q$.

证 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$,

根据141题的结论,有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q.$$

取 $\varepsilon=\frac{1}{2}(q_1-q)>0$,

于是存在 N,当 $n>N$ 时有

$$|\sqrt[n]{a_n}-q|<\varepsilon,$$

从而有 $$\sqrt[n]{a_n}<q+\varepsilon=\frac{q+q_1}{2}=\frac{q+q_1}{2q_1}\cdot q_1.$$

令

$$\mu=\frac{q+q_1}{2q_1},$$

由 $q_1>q$,

有 $\mu<1$,

于是有 $a_n < \mu^n q_1^n$.

从而 $a_n = o(q_1^n)$.

【2591.1】 设对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0)$ 的各项,当 $n \geqslant n_0$ 时 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \rho < 1$ 成立,

证明:对于级数的其他余项

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots.$$

若 $n \geqslant n_0$,则估算为 $R_n \leqslant a_{n_0} \cdot \frac{\rho^{n-n_0+1}}{1-\rho}$.

证 因为当 $n \geqslant n_0$ 时

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \rho < 1,$$

于是 $a_{n+1} \leqslant \rho a_n, a_{n+2} \leqslant \rho a_{n+1} \leqslant \rho^2 a_n, \cdots,$

$$a_{n+p} \leqslant \rho^p a_n, \forall p \in IN.$$

因此
$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \leqslant a_n(\rho + \rho^2 + \cdots + \rho^p) \leqslant \frac{a_n \rho}{1-\rho},$$

于是有 $R_n \leqslant \frac{a_n \rho}{1-\rho}$.

【2591.2】 取级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(2n)!!]^2}{(4n)!!}$(其中 $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdots\cdots (2n)$)多少项就足以使相应部分的和 S_n 小于级数和 S 达到 $\varepsilon = 10^{-6}$?

解 $(2n)!! = 2^n n!, (4n)!! = (2 \cdot 2n)!! = 2^{2n}(2n)!$,故

$$a_n = \frac{[(2n)!!]}{(4n)!!} = \frac{(n!)^2 \cdot 2^{2n}}{(2n)! \cdot 2^{2n}} = \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(n!)}{(n+1)\cdots(n+n)} \leqslant \frac{1}{2^n}$$

而 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \leqslant \frac{1}{3} < 1$,

记 $\rho = \frac{1}{3}$,由 2591.1 的结论知

$$s - s_n = R_n \leqslant a_n \cdot \frac{\rho}{1-\rho} \leqslant \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

因此，要使 $R_n \leqslant 10^{-6}$，可取 $n \geqslant 20$.

【2592】 证明：若

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1 \qquad (a_n > 0),$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

相反的结论不正确. 研究例题：

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots.$$

证 取 $\varepsilon > 0$，使得 $q + \varepsilon < 1$，由

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

故存在 N，当 $n \geqslant N$ 时，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon = \lambda < 1,$$

于是有 $\quad 0 < a_n \leqslant a_N \lambda^{n-N}, n \geqslant N$.

因为 $\sum_{n=N}^{\infty} \lambda^{n-N}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ 收敛. 于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

反之不成立，如

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots,$$

显然收敛，而

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1}, & n = 2m+1, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{m}, & n = 2m. \end{cases}$$

于是有 $\quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$.

【2593】　证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0)$存在

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \tag{①}$$

则也存在

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q. \tag{②}$$

相反的结论不正确：若存在极限②，则极限①也可能不存在.

证　前半部分是141的结论（略）

反之不成立，考察级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2},$$

但
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3+(-1)^{n+1}}{2[3+(-1)^n]} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & n\text{ 为偶数}, \\ 1, & n\text{ 为奇数}. \end{cases}$$

故极限$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$不存在.

【2594】　证明：若

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q \qquad (a_n \geqslant 0).$$

则(1)当$q<1$时级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛；(2)而当$q>1$时这个级数是发散的（广义柯西判别法）.

证　(1) 取$0<\varepsilon_0<\frac{1-q}{2}$，

因　$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q$，

于是存在n_0，使得当$n \geqslant n_0$时，有

$$0 < \sqrt[n]{a_n} < q+\varepsilon_0,$$

故
$$0 < \sqrt[n]{a_n} < \frac{q+1}{2} \qquad (n \geqslant n_0).$$

也就是 $0 < a_n < \left(\frac{q+1}{2}\right)^n \quad (n \geqslant n_0)$.

又 $0 < \frac{q+1}{2} < 1$,

于是级数$\sum_{n=n_0}^{\infty}\left(\frac{q+1}{2}\right)^n$ 收敛. 从而$\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 收敛,结论成立.

(2) 因为 $q > 1$,因此必有无穷多个 a_n,有 $\sqrt[n]{a_n} > 1$ 成立.

故 $a_n > 1$,

于是这样的 a_n 不可能趋于零,所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

研究下列级数的收敛性(2595 ~ 2597).

【2595】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

故该级数收敛.

【2596】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$.

解 因为

$$\left|\frac{n\cos^2 n\frac{\pi}{3}}{2^n}\right| \leqslant \frac{|n|}{2^n},$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|n|}{2^n}$ 收敛,所以该级数收敛.

【2597】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$.

解 因为

$$0 < \frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n} < \frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n},$$

现考察级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}$的敛散性.

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^3(\sqrt{2}+1)^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}+1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$$

$$=\frac{\sqrt{2}+1}{3}<1,$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}$收敛,故该级数收敛.

【2597.1】 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$

解 因为

$$0\leqslant\frac{1+\cos n}{2+\cos n}=1-\frac{1}{2+\cos n}\leqslant\frac{2}{3}.$$

而 $\ln_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{2(n+1)-\ln(n+1)}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-\ln n}}=\frac{2}{3}<1,$ 因此级数$\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-\ln n}$收敛,所以原级数也收敛

利用拉阿比和高斯判别法,研究下列级数的收敛性(2598～2605).

【2598】 $\left(\frac{1}{2}\right)^p+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^p+\cdots.$

解 由$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p,$

于是 $$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p-1}{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{p}{2n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\frac{1}{n}}=\frac{p}{2}.$$

所以当$\frac{p}{2}>1$时,即 $p>2$ 时该级数收敛.

【2599】 $\frac{a}{b}+\frac{a(a+d)}{b(b+d)}+\frac{a(a+d)(b+2d)}{b(b+d)(b+2d)}+\cdots$

$(a>0,b>0,d>0)$.

解 由

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{b+nd}{a+nd},$$

于是
$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{b+nd}{a+nd}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)n}{a+nd}=\frac{b-a}{d},$$

所以当$\frac{b-a}{d}>1$时,该级数收敛.

【2600】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$.

解 由

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+p}$$

于是
$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+p}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{e}(1+t)^{\frac{1}{t}+p}-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{e^{\left(\frac{1}{t}+p\right)\ln(1+t)}-e}{te}=\lim_{t\to0}\frac{e^{1+\left(p-\frac{1}{2}\right)t+O(t)}-e}{te}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{e^{\left(p-\frac{1}{2}\right)t+O(t)}-1}{t}=p-\frac{1}{2}.$$

所以当 $p-\frac{1}{2}>1$ 时,即 $p>\frac{3}{2}$ 时,该级数收敛.

【2601】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$.

解　由

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}},$$

故

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}-1\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n+1}}=+\infty.$$

所以该级数收敛.

【2602】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}\qquad(q>0).$

解　由

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^p\left(1+\frac{q}{n+1}\right),$$

故

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^p\left(1+\frac{q}{n+1}\right)-1\right]$$

$$\xlongequal{t=\frac{1}{n}}\lim_{t\to0}\frac{(1+t)^p\left(1+\frac{qt}{1+t}\right)-1}{t}$$

$$=p+q.$$

所以当 $p+q>1$ 时,该级数收敛.

【2603】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}.(p>0,q>0).$

解　由

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^q\frac{1+n}{p+n},$$

故

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^q\frac{1+n}{p+n}-1\right)$$

$$\xlongequal{t=\frac{1}{n}}\lim_{t\to0}\frac{\frac{(1+t)^{q+1}}{1+pt}-1}{t}$$

$$=q+1-p.$$

所以当 $q+1-p>1$ 时,即 $q>p$ 时,该级数收敛.

【2604】 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right]^p\cdot\frac{1}{n^q}$.

解 由

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p\left(\frac{n+1}{n}\right)^q,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}n\left(\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p\left(\frac{n+1}{n}\right)^q-1\right)$$
$$\overset{t=\frac{1}{n}}{=\!=\!=}\lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{2+2t}{2+t}\right)^p(1+t)^q-1}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{2^p(1+t)^{p+q}-(2+t)^p}{t(t+2)^p}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{2^p(p+q)(1+t)^{p+q-1}-p(2+t)^{p-1}}{(2+t)^p+tp(2+t)^{p-1}}$$
$$=\frac{2^p(p+q)-2^{p-1}p}{2^p}=q+\frac{p}{2}.$$

所以当 $p+\frac{q}{2}>1$ 时,该级数收敛.

【2605】 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{q(q+1)\cdots(q+n-1)}\right]^\alpha\quad(p>0,q>0)$.

解 由

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{q+n}{p+n}\right)^\alpha,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\left(\frac{q+n}{p+n}\right)^\alpha-1\right)$$
$$\overset{t=\frac{1}{n}}{=\!=\!=}\lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{1+qt}{1+pt}\right)^\alpha-1}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{(1+qt)^\alpha-(1+pt)^\alpha}{t(1+pt)^\alpha}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\alpha(1+qt)^{\alpha-1}q-\alpha(1+pt)^{\alpha-1}p}{(1+pt)^\alpha+t\alpha(1+pt)^{\alpha-1}p}$$

$$= \alpha(q-p), (\alpha \neq 0).$$

所以当 $\alpha(q-p) > 1$ 时，该级数收敛，$\alpha = 0$ 时，该级数显然发散.

【2606】 证明：对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0)$，若当 $n \to \infty$ 时，以下条件成立：

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

则 $$a_n = o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right).$$

其中 $\varepsilon(>0)$ 任意小，并且当 $n \to \infty$ 时，若 $p > 0$，则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，亦即在 $n \geqslant n_0$ 时单调递减，当 $n \to \infty$ 时趋向于零.

证 由

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty \text{ 时}),$$

对上式两边取对数有

$$\ln a_n - \ln a_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n}(p + \alpha_n),$$

其中 $$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

于是有 $$\ln a_1 - \ln a_N = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}(p + \alpha_n),$$

又因为 $$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N-1} = \ln(N-1) + C + o(1),$$

其中 C 为欧拉常数，而

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{N-1} \frac{\alpha_n}{n}}{\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}} = \lim_{N\to\infty} \alpha_N = 0,$$

令 $l_N = \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n}{n}\right) \Big/ \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}\right)$,

于是 $l_N = o(1)$,($N \to \infty$ 时).

我们有

$$\ln a_1 - \ln a_N = (p + l_N)\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}$$
$$= (p + l_N)(C + \ln(N-1)) + o(1))$$
$$= (p + l_N)\ln(N-1) + pC + o(1).$$

从而 $\ln a_N = -(p + l_N)\ln(N-1) + \ln a_1 - pC + o(1)$
$$= -(p + l_N)\ln(N-1) + k + o(1),$$

这里 $k = \ln a_1 - pC$.

故 $a_N = e^{k+o(1)} \cdot (N-1)^{-(p+l_N)}$
$$= e^{k+o(1)} \left(\frac{N-1}{N}\right)^{-(p+l_N)} \cdot N^{-p} \cdot N^{-l_N}$$

于是 $\forall \varepsilon > 0$,当 N 充分大时有

$$|l_N| < \frac{\varepsilon}{2},$$

故 $N^{-l_N} < N^{\frac{\varepsilon}{2}}$.

又 $\lim_{N\to\infty} \left(\frac{N-1}{N}\right)^{-(p+\beta_N)} = 1$,

所以,当 N 充分大时,有

$$0 \leqslant a_N \leqslant C \cdot N^{\frac{\varepsilon}{2}} N^{-p} = o\left(\frac{1}{N^{p-\frac{\varepsilon}{2}}}\right),$$

其 C 是常数,于是

$$a_N = o\left(\frac{1}{N^{p-\varepsilon}}\right).$$

命题得证.

确定一般项 a_m 的减小 m 阶,研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性,若(2607 ~ 2641).

【2607】 $a_n=\dfrac{n^p+a_1n^{p-1}+\cdots+a_p}{n^q+b_1n^{q-1}+\cdots+b_q}$.

其中 $n^q+b_1n^{q-1}+\cdots+b_q>0$.

解　因为 $a_n=o^*\left(\dfrac{1}{n^{q-p}}\right)$,

所以当 $q-p>1$ 即 $q>p+1$ 时，该级数收敛.

【2608】 $a_n=\dfrac{1}{n^p}\sin\dfrac{\pi}{n}$.

解　由

$$a_n=\frac{1}{n^p}\sin\frac{\pi}{n},$$

知 $$a_n\geqslant 0,n=1,2,\cdots.$$

又 $$\lim_{n\to\infty}=\frac{\frac{1}{n^p}\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^{p+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}=\pi,$$

于是 $$a_n=o^*\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right),$$

所以当 $p+1>1$，即 $p>0$ 时，该级数收敛.

【2609】 $a_n=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\dfrac{n-1}{n+1},(n>1)$.

解　因为

$$\frac{n-1}{n+1}<1,(n>1),$$

于是有 $$a_n<0,$$

又 $$a_n=\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^p\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)=o^*\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}\right)$$

于是当 $\dfrac{p}{2}+1>1$，即 $p>0$ 时，该级数收敛.

【2610】 $a_n=\ln^p\left(\sec\dfrac{\pi}{n}\right)$.

解　当 $n>2$ 时，有 $a_n>0$.

又 $$a_n=\left(\ln\sqrt{1+\tan^2\frac{\pi}{n}}\right)^p$$

$$=\frac{1}{2^p}\ln^p\left(1+\tan^2\frac{\pi}{n}\right)\sim\frac{1}{2^p}\tan^{2p}\frac{\pi}{n}\sim\frac{1}{2^p}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2p},$$

于是有 $$a_n=o^*\left(\frac{1}{n^{2p}}\right),$$

所以当 $2p>1$,即 $p>\frac{1}{2}$ 时,该级数收敛.

【2611】 $a_n=\log_{b^n}\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}}{n}\right)\quad(a>0,b>0)$.

解 由题意,$b\neq 1$

又 $$a_n=\frac{\ln\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}}{n}\right)}{n\ln b}\sim\frac{1}{\ln b}\cdot\frac{\sqrt[n]{a}}{n^2}=o^*\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

所以该级数收敛.

【2612】 $a_n=\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^p$.

解 由

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o^*\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}$$

$$=\mathrm{e}^{1-\frac{1}{2n}+o^*\left(\frac{1}{n^2}\right)},\text{且 }\mathrm{e}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

于是有 $$a_n=[\mathrm{e}(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2n}+o^*\left(\frac{1}{n^2}\right)})]^p\sim\mathrm{e}^p\left(\frac{1}{2n}+o^*\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^p$$

$$=o^*\left(\frac{1}{n^p}\right).$$

所以当 $p>1$ 时,该级数收敛.

【2613】 $a_n=\frac{1}{n^{1+\frac{k}{\ln n}}}$.

解 由 $$a_n=n^{-\left(1+\frac{k}{\ln n}\right)}=\mathrm{e}^{-\left(1+\frac{k}{\ln n}\right)\ln n}$$

$$=\mathrm{e}^{-(\ln n+k)}=\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-k},$$

所以该级数发散.

【2614】 $a_n=\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

解　由

$$a_n=\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}=o^*\left(\frac{1}{n}\right),$$

有该级数发散.

【2614.1】 证明扎迈判别法：若当 $n>n_0$ 时，

$$(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}\geqslant p>1.$$

则正号级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(a_n\geqslant 0)$ 收敛；而当 $n>n_0$ 时，

$$(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}\leqslant 1,\text{则该级数发散.}$$

证　由

$$(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}\geqslant p>1,$$

有 $$0\leqslant a_n<\left(1-\frac{p\ln n}{n}\right)^n,$$

由 $$\frac{\ln\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{p\ln n}{n}\right)^n}}{\ln n}=\frac{-n\ln\left(1-\dfrac{p\ln n}{n}\right)}{\ln n}$$

$$=-\frac{n}{\ln n}\left[-\left(\frac{p\ln n}{n}+\frac{p^2\ln^2 n}{2n^2}\right)+o^*\left(\frac{\ln^3 n}{n^3}\right)\right]$$

$$=p+\frac{\ln n}{2n}+o^*\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)\geqslant 1+\alpha,$$

当 n 很大时由对数检验法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{p\ln n}{n}\right)^n$ 收敛，于是原级数收敛.

又由 $$(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}\leqslant 1,$$

有 $a_n \geqslant \left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n$,

又 $n\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)=-n\left(\frac{\ln n}{n}+\frac{\ln^2 n}{2n^2}+o^*\left(\frac{\ln^3 n}{n^3}\right)\right)$

$$=-\left[\ln n+\frac{\ln^2 n}{2n}+o^*\left(\frac{\ln^3 n}{n^2}\right)\right]\to-\infty,$$

因此$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n$发散,所以原级数发散.

【2615】 证明对数判别法:若存在 $\alpha>0$,使得当 $n\geqslant n_0$ 时

$$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant 1+\alpha.$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(a_n>0)$收敛;若当 $n\geqslant n_0$ 时,

$$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\leqslant 1,$$

则该级数发散.

证 由$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant 1+\alpha$,

有 $\frac{1}{a_n}\geqslant n^{1+\alpha}$,

即 $a_n\leqslant\frac{1}{n^{1+\alpha}}$.

故该级数收敛.

由 $\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\leqslant 1$,

有 $\frac{1}{a_n}\leqslant n$,

即 $a_n\geqslant\frac{1}{n}$.

故该级数发散.

研究具如下一般项的级数的收敛性(2616 ～ 2618).

【2616】 $a_n = n^{\ln x}\qquad (x > 0)$.

解　由

$$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n} = \frac{-\ln x \ln n}{\ln n} = -\ln x,$$

有当 $-\ln x > 1$,即 $x < \frac{1}{e}$ 时,该级数收敛.

【2617】 $a_n = \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}\quad (n > 1)$.

解　由 $\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n} = \ln\ln\ln n$,

显然存在 n_0,当 $n > n_0$ 时有 $\ln\ln\ln n \geqslant p > 1$,所以该级数收敛.

【2618】 $a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}, (n > 1)$.

解　由 $\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n} = \frac{(\ln\ln n)^2}{\ln n}$,

又由 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln\ln x)^2}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln\ln x}{\ln x} = 0,$$

有 $$\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln\ln n)^2}{\ln n} = 0.$$

于是存在 n_0,当 $n > n_0$ 时,有

$$\frac{(\ln\ln n)^2}{\ln n} < 1,$$

所以,该级数发散.

利用柯西积分判别法,研究具如下一般项的级数的收敛性(2619 ～ 2620).

【2619】 $a_n = \frac{1}{n\ln^p n}\quad (n > 1)$.

解　令 $f(x) = \frac{1}{x\ln^p x}$,

由 $\quad f'(x)=-\dfrac{\ln^p x+p\ln^{p-1}x}{(x\ln^p x)^2}$,

知,$\forall p$,当 x 充分大时,$f(x)$ 非负递减的.

又 $$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^p x}=\begin{cases}\left.\dfrac{1}{(1-p)\ln^{p-1}x}\right|_3^{+\infty}, & p\neq 1,\\ \left.\ln\ln x\right|_3^{+\infty}, & p=1,\end{cases}$$

故当 $p>1$ 时,该级数收敛.

【2620】 $a_n=\dfrac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}\quad(n>2)$.

解 令 $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}$,

由 $f'(x)=-\dfrac{(\ln x)^p(\ln\ln x)^q+p(\ln x)^{p-1}(\ln\ln x)^q+q(\ln x)^{p-1}(\ln\ln x)^{q-1}}{[x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q]^2}$,

知,当 x 充分大时,$f'(x)<0$,所以当 x 充分大时,$f(x)$ 非负递减.

下面分情形来讨论.

1° 令 $p=1$,

由 $$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^q}=\begin{cases}\left.\dfrac{1}{(1-q)(\ln\ln x)^{q-1}}\right|_3^{+\infty}, & q\neq 1,\\ \left.\ln\ln\ln x\right|_3^{+\infty}, & q=1,\end{cases}$$

知,当 $q>1$ 时,该级数收敛,当 $q\leqslant 1$ 时,该级数发散.

2° 令 $p\neq 1$

由 $$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}=\int_3^{+\infty}\frac{d\ln x}{(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}\xlongequal{令 t=\ln x}\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{dt}{t^p(\ln t)^q},$$

当 $p>1$ 时,取 $\delta>0$,使 $p-\delta>1$,

由 $$\lim_{t\to+\infty}t^{p-\delta}\frac{1}{t^p(\ln t)^q}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^\delta(\ln t)^q}=0,\ \forall q\in IN,$$

有 $\displaystyle\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{dt}{t^p(\ln t)^q}$ 收敛,故当 $p>$ 时,该级数收敛.

当 $p<1$ 时，取 $\varepsilon>0$，使 $p+\varepsilon<1$，由

$$\lim_{t\to+\infty} t^{p+\varepsilon}\frac{1}{t^p(\ln t)^q}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{\varepsilon}}{(\ln t)^q}=+\infty,$$

故当 $p<1$ 时，该级数发散.

【2620.1】　研究以下级数的收敛性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 2\cdot\ln 3\cdots\ln(n+1)}{\ln(2+p)\cdot\ln(3+p)\cdots\ln(n+1+p)}\quad(p>0).$$

解　由 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\ln(n+2)}{\ln(n+2+p)}$，所以

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\ln(n+2+p)}{\ln(n+2)}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln(x+2)}\cdot\ln\left(1+\frac{p}{n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln(n+2)}\cdot\frac{p}{n+2}=0.$$

故由拉阿伯判别法知该级数发散.

【2620.2】　研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{v(n)}{n^2}$（其中 $v(n)$ 为 n 的数字数）的收敛性.

解　由题意假设应是 $|v(n)|\leqslant c$，

$$\int_1^{\infty}\frac{|v(x)|}{x^2}\mathrm{d}x\leqslant c\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x<+\infty,$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{v(n)}{n^2}$ 收敛.

【2620.3】　设 $\lambda_n(n=1,2,\cdots)$ 为方程 $\tan x=x$ 的正根序列，研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-2}$ 的收敛性.

解　因为

$$\tan\lambda_n=\lambda_n,\lambda_n>0,n=1,2,\cdots,\lambda_{n+1}>\lambda_n.$$

所以考察$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-2}$ 的收敛性只要考察$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛性，

又$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛，知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-2}$ 收敛.

【2621】 研究级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$ 的收敛性.

解 因为 $\ln(n!)=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln i<n\ln n$，

于是有 $\frac{1}{\ln(n!)}>\frac{1}{n\ln n}>0$，

由 2619 知，级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散，故$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$ 发散.

【2622】 证明：各项单调递减的正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^na_{2^n}$ 同时收敛或发散.

证 因为 $a_n\geqslant 0$，　　$n=1,2,\cdots$，

因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛性与部分和的有界性等价.

令 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，

$t_k=a_1+2a_2+\cdots+a^ka_{2^k}$.

当 $n<2^k$ 时，

$$S_n\leqslant a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2^k}+\cdots+a_{2^{k+1}-1})$$

$$\leqslant a_1+2a_2+\cdots+2^ka_{2^k}=t_k,$$

于是有 $S_n\leqslant t_k$，($n<2^k$ 时)，

当 $n>2^k$ 时

$$S_n\geqslant a_1+a_2+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2^{k-1}+1}+\cdots+a_{2^k})$$

$$\geqslant\frac{1}{2}a_1+a_2+2a_4+\cdots+2^{k-1}a_{2^k}=\frac{1}{2}t_k,$$

于是有 $2S_n\geqslant t_k$，($n>2^k$ 时)，

综上所述$\{S_n\}$ 与$\{t_k\}$ 同时有界或同时无界.

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n a_{2^n}$同时收敛或同时发散.

【2623】 设 $f(x)$ 为单调递减正值函数. 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 收敛，则对于它的余项：

$$R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}f(k),$$

有如下估计：

$$\int_{n+1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x<R_n<f(n+1)+\int_{n+1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x.$$

利用此式，求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$的和，精确度到 0.01.

证 因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$收敛，由柯西积分判别法知$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，于是由 $f(x)$ 递减性有

$$f(n+i+1)\leqslant\int_{n+i}^{n+i+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(n+i),\quad (i=1,2,\cdots).$$

故有 $$\sum_{i=1}^{\infty}f(n+i+1)\leqslant\int_{n+1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}f(n+i)$$

于是有 $$R_n-f(n+1)\leqslant\int_{n+1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\leqslant R_n,$$

即 $$\int_{n+1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\leqslant R_n\leqslant f(n+1)+\int_{n+1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x.$$

令 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$,

由 $$R_n\leqslant f(n+1)+\int_{n+1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{(n+1)^2}+\int_{n+1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1},$$

可令$\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{n+1}\leqslant 0.001$,

有 $\quad n\geqslant 4+2\sqrt{6}\approx 4.9.$

故当 $n=5$ 时,可取$\sum\limits_{n=1}^{5}\dfrac{1}{n^2}\approx 1.46$ 作为级数的近似值且满足精确要求.

【2624】 证明叶尔马科夫判别法:设 $f(x)$ 为单调递减正值函数,且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x f(e^x)}{f(x)}=\lambda,$$

若 $\lambda<1$,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 收敛;

若 $\lambda>1$ 则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 而发散.

证 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x f(e^x)}{f(x)}=\lambda$,

有任意 $\varepsilon>0$,存在 $M>0$,当 $x>M$ 时$\dfrac{e^x f(e^x)}{f(x)}<\lambda+\varepsilon$ 成立.

1° 若 $\lambda<1$,取 ε 使得 $\lambda+\varepsilon=\gamma<1$,于是有

$$e^x f(e^x)<\gamma f(x),$$

当 $n>M$ 时,我们有

$$\int_M^n e^x f(e^x)\mathrm{d}x<\gamma\int_M^n f(x)\mathrm{d}x,$$

进一步有$\displaystyle\int_{e^M}^{e^n}f(x)\mathrm{d}x<\gamma\int_M^n f(x)\mathrm{d}x$,

于是有 $$(1-\gamma)\int_{e^M}^{e^n}f(x)\mathrm{d}x<\gamma\left(\int_M^n f(x)\mathrm{d}x-\int_{e^M}^{e^n}f(x)\mathrm{d}x\right)$$
$$=\gamma\left(\int_M^{e^M}f(x)\mathrm{d}x-\int_n^{e^n}f(x)\mathrm{d}x\right),$$

从而有 $$\int_{e^M}^{e^n}f(x)\mathrm{d}x<\frac{\gamma}{1-\gamma}\int_M^{e^M}f(x)\mathrm{d}x.$$

现固定 M,令 $n\to+\infty$,有

$$\int_{e^M}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{\gamma}{1-\gamma}\int_M^{e^M} f(x)\mathrm{d}x = 常数.$$

由柯西积分判别法知$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$收敛.

2° 若当$\lambda > 1$时

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda$,有任意$\varepsilon > 0$,存在$N > 0$,当$x > N$时

$\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} > \lambda - \varepsilon$成立.

现取ε,使得$\lambda - \varepsilon > 1$,于是有

$$e^x f(e^x) > f(x) \qquad (x > N).$$

从而当$n > N$时,有

$$\int_N^n e^x f(e^x)\mathrm{d}x > \int_N^n f(x)\mathrm{d}x,$$

也就是 $\int_{e^N}^{e^n} f(x)\mathrm{d}x > \int_N^n f(x)\mathrm{d}x,$

于是有 $\int_{e^N}^{n} f(x)\mathrm{d}x + \int_n^{e^n} f(x)\mathrm{d}x > \int_N^{e^N} f(x)\mathrm{d}x + \int_{e^N}^n f(x)\mathrm{d}x,$

即 $\int_n^{e^n} f(x)\mathrm{d}x > \int_N^{e^N} f(x)\mathrm{d}x \qquad (n > N).$

N固定,现令$e_0 = N+1, e_1 = e^{e_0}, e_2 = e^{e_1}, \cdots, e_{k+1} = e^{e_k}, \cdots, m = e_0, e_1, e_2, \cdots$,于是有

$$\int_{e_0}^{e_1} f(x)\mathrm{d}x > \int_N^{e^N} f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{e_1}^{e_2} f(x)\mathrm{d}x > \int_N^{e^N} f(x)\mathrm{d}x,$$

$\cdots,$

$$\int_{e_k}^{e_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x > \int_N^{e^N} f(x)\mathrm{d}x,$$

$\cdots,$

从而 $\int_{e_0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\int_{e_{k-1}}^{e_k} f(x)\mathrm{d}x$

$$\geqslant \lim_{m\to\infty} m\int_N^{e^N} f(x)\mathrm{d}x = +\infty,$$

于是根据柯西积分判别法,级数$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散.

【2625】 证明罗巴楔夫斯基判别法:一般项单调趋于零的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数$\sum_{m=0}^{\infty} p_m 2^{-m}$ 同时收敛或发散.

其中 p_m 为 a_n 的满足不等式:

$$a_n \geqslant 2^{-m}(n = 1,2,\cdots,p_m).$$

证 因为 p_m 是满足不等式$a_n \geqslant 2^{-m}$ 的项a_n 的最大指标,于是有

$$2^{-m} \leqslant a_{p_{m-1}+1} < 2^{-m+1}, 2^{-m} \leqslant a_{p_{m-1}+2} < 2^{-m+1},$$

$$2^{-m} \leqslant a_{p_m} < 2^{-m+1}, a_{p_m+1} < 2^{-m},$$

从而

$$(p_m - p_{m-1})2^{-m+1} > a_{p_{m-1}+1} + a_{p_{m-1}+2} + \cdots + a_{p_m} \geqslant (p_m - p_{m-1})2^{-m},$$

关于 m 求和得

$$\sum_{m=1}^{N}(p_m - p_{m-1})2^{-m} \leqslant \sum_{m=1}^{N}(a_{p_{m-1}+1} + \cdots + a_{p_m}) < \sum_{m=1}^{N}(p_m - p_{m-1})2^{-m+1},$$

于是我们有级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数$\sum_{m=1}^{\infty}(p_m - p_{m-1})2^{-m+1}$ 具有相同的敛散性.

下面证明$\sum_{m=1}^{\infty}(p_m - p_{m-1})2^{-m+1}$ 与$\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$ 有相同的敛散性.

因为$(p_m - p_{m-1})2^{-m+1} < 2p_m 2^{-m}$,

所以由$\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$ 收敛可得$\sum_{m=1}^{\infty}(p_m - p_{m-1})2^{-m+1}$ 收敛.

现来证明$\sum_{m=1}^{\infty}(p_m - p_{m-1})2^{-m+1}$ 收敛可推得$\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$ 收敛.

令

$$A=\sum_{m=1}^{\infty}(p_m-p_{m-1})2^{-m+1},$$

因为 $p_m-p_{m-1}\geqslant 0\qquad (m=1,2,\cdots)$,

于是有
$$\begin{aligned}A&\geqslant\sum_{m=1}^{N}(p_m-p_{m-1})2^{-m+1}\\&=\sum_{m=1}^{N}p_m2^{-m+1}-\sum_{m=1}^{N}p_{m-1}2^{-m+1}\\&=\sum_{m=1}^{N}p_m\cdot 2^{-m+1}-\sum_{m=0}^{N-1}p_m2^{-m}\\&=p_N2^{-N+1}+\sum_{m=1}^{N-1}p_m\left(\frac{1}{2^{m-1}}-\frac{1}{2^m}\right)-p_0\\&=\sum_{m=1}^{N-1}p_m2^{-m}+p_N2^{-N+1}-p_0.\end{aligned}$$

现设 $S_{N-1}=\sum\limits_{m=1}^{N-1}p_m2^{-m}$,

于是我们有 $S_{N-1}\leqslant A+p_0-p_N2^{-N}\leqslant A+p_0$,

由单调有界原理知 $\lim\limits_{N\to\infty}S_N$ 存在.

所以 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}p_m2^{-m}$ 收敛.

研究下列级数的收敛性(2626 ～ 2645).

【2626】 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^\alpha}$.

解　因为

$$\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^\alpha}=\frac{4}{n^\alpha(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}>0,$$

又
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{4}{n^\alpha(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}}{\dfrac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}}=2,$$

当 $\alpha+\dfrac{1}{2}>1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ 收敛,于是当 $\alpha+\dfrac{1}{2}>1$ 时,级

数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}$收敛.

【2627】 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+a}-\sqrt[4]{n^2+n+b})$.

解 由

$$\sqrt{n+a}-\sqrt[4]{n^2+n+b}$$

$$=\frac{(\sqrt{n+a})^4-(\sqrt[4]{n^2+n+b})^4}{(\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^2+n+b})(\sqrt{n+a})^2+(\sqrt[4]{n^2+n+b})^2}$$

$$=\frac{(2a-1)n+a^2-b}{(\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a+\sqrt{n^2+n+b})}.$$

有当n充分大时,通项保持定号,于是不妨假设定原级数为正项级数.

下面分两种情况来讨论:

1° $a=\frac{1}{2}$. 因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a^2-b}{(\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a+\sqrt{n^2+n+b})}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}$$

$$=\frac{a^2-b}{4},$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛,故原级数收敛.

2° $a\neq\frac{1}{2}$. 因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2a-1)n+a^2-b}{(\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a+\sqrt{n^2+n+b})}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$=\frac{2a-1}{4}\neq 0,$$

所以原级数发散.

【2628】 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cot\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)$.

解 因为

$$\cot\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{n\pi}{2n+1}$$
$$=\left(\cot\frac{n\pi}{4n-2}-1\right)+\left(1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right),$$

于是考虑如下两级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cot\frac{n\pi}{4n-2}\right),$$

和 $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right).$$

它们皆为正项级数. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cot\frac{n\pi}{4n-2}}{\frac{1}{n}}=\frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{\pi^2}{32},$$

有 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cot\frac{n\pi}{4n-2}\right)$发散, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)$收敛.

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cot\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)$发散.

【2629】 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right]$.

解 由不等式

$$\ln(1+x)<x,(x>-1,x\neq 0),$$

有 $$\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},$$

$$\ln\frac{n+1}{n}=-\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)>\frac{1}{n+1},$$

故 $$\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}.$$

从而 $$0<\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}$$

$$<\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}}$$

$$<\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{2}{\sqrt{n+1}}}<\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)$ 收敛.

【2630】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}$.

解 就 α 的两种情形加以讨论

1° $\alpha\leqslant 2$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln n=+\infty$，由 139 题知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n}=+\infty.$$

于是 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}}{\frac{1}{n^{\alpha-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n}=+\infty.$$

由 $\sum\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ 发散，于是我们有当 $\alpha\leqslant 2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}$ 发散.

2° $\alpha>2$，由斯特林格公式

$$n!=\sqrt{2\pi n}n^{n}e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}\qquad(0<\theta_n<1),$$

有
$$\frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}=\frac{\ln 2\pi}{2n^{\alpha}}+\frac{\ln n}{2n^{\alpha}}+\frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}+\frac{\theta_n}{12n^{\alpha+1}}-\frac{1}{n^{\alpha-1}},$$

因为当$\alpha>2$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha}}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\theta_n}{n^{\alpha+1}}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$皆收敛. 于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}$收敛.

【2631】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt[3]{n}}$.

解　因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4}{e^x}=0$,

所以存在n_0，当$x\geqslant n_0$时，有$e^x>2x^4$，于是当$n>n_0^3$时，有$e^{\sqrt[3]{n}}<2n^{\frac{4}{3}}$，故

$$e^{-\sqrt[3]{n}}<\frac{1}{2}n^{-\frac{4}{3}},$$

从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt[3]{n}}$收敛.

【2632】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2e^{-\sqrt{n}}$.

解　由于$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^8}{e^x}=0$

所以存在n_0，当$x\geqslant n_0$时有$e^x>x^8$

从而当$n>n_0^2$时，有

$$e^{\sqrt{n}}>(\sqrt{n})^8=n^4,$$

于是　$$n^2e^{-\sqrt{n}}<n^2\cdot n^{-4}=n^{-2}.$$

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2e^{-\sqrt{n}}$收敛.

【2633】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1)$.

解　因$\frac{1}{n^{n^2+1}}-1=e^{\frac{\ln n}{n^3+1}}-1\sim\frac{\ln n}{n^2+1}\sim\frac{\ln n}{n^2}$,

而$\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx$收敛.

故$\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1)$收敛.

【2634】 $\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}}$.

解 1° 若$c\neq 0$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a\ln n+b}{c\ln n+\mathrm{d}}=\frac{a}{c},$$

所以$a\neq 0$时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a\ln n+b}{c\ln n+\mathrm{d}}=\frac{a}{c}\neq 0.$$

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\ln n+b}{c\ln n+\mathrm{d}}$发散.

当$a=0$时,级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b}{c\ln n+\mathrm{d}}$,当$b=0$时,级数显然收敛,当$b\neq 0$,且$b$与$c$同号时,$n$充分大时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b}{c\ln n+\mathrm{d}}$为正项级数,当$b\neq 0$,且$b$与$c$异号时,$n$充分大时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b}{c\ln n+\mathrm{d}}$为负项级数,于是不妨设$bc\neq 0$且$b>0,c>0$时,级数为$\sum\frac{b}{c\ln n+\mathrm{d}}$为正项级数,因为$n$充分大时$\frac{b}{c\ln n+\mathrm{d}}>\frac{b}{cn+\mathrm{d}}$,所以当$bc\neq 0$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b}{c\ln n+\mathrm{d}}$发散.

2° 当$c=0$时,原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\ln n+b}{\mathrm{d}}$,

显然只有当$a=0,\mathrm{d}\neq 0$时,级数收敛,故综上所述,当$a\cdot c\neq 0$时,级数发散,当$a\cdot c=0$且$a=0$时级数收敛,当$c\neq 0$,且$bc\neq 0$时,级数发散,当$c\neq 0,b=0$时,级数收敛.

【2635】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^2\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)}$.

解 因为

$$\frac{\dfrac{1}{\ln^2\dfrac{1}{n}}}{\dfrac{1}{\ln^2\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)}}=\left(\frac{\ln\sin\dfrac{1}{n}}{\ln\dfrac{1}{n}}\right)^2,$$

而 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin x}{\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{\dfrac{1}{x}}=1.$$

所以 $$\frac{1}{\ln^2\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)}\sim\frac{1}{\ln^2\dfrac{1}{n}}=\frac{1}{\ln^2 n},$$

于是原级数的敛散性等价于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^2 n}$的敛散性.

由 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0,$$

于是存在 $M>0$，当 $x>M$ 时，有$\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}<1$，即

$$\ln^2 x<x.$$

所以存在 N，当 $n>N$ 时，有

$$\ln^2 n<n,$$

故 $$\frac{1}{\ln^2 n}>\frac{1}{n}\qquad(n>N).$$

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^2 n}$发散，也就是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^2\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)}$发散.

【2636】 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}$.

解 (1) 若 $a=0$ 时,该级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}1$,发散.

(2) 若 $a\neq 0$ 时,

$$\sqrt[n]{a_n}=\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^2}=e^{n^2\ln\cos\frac{a}{n}}=e^{n^2\ln\left(1-\frac{a^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)}$$

$$=e^{n^2\left(-\frac{a^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)}=e^{-\frac{a^2}{2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)},$$

所以 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=e^{-\frac{a^2}{2}}<1.$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^2}$ 在 $a\neq 0$ 时收敛.

【2637】 $\sum_{n=3}^{\infty}\ln\left(\frac{\text{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)$.

解 由

$$a_n=\ln\left(\frac{\text{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)$$

$$=\frac{\text{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\ln\left[1+\left(\frac{\text{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}-1\right)\right]^{\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\text{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}},$$

而 $\lim_{n\to\infty}\frac{\text{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}=1,$

于是由于 $\text{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\text{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$

有 $\lim_{x\to 0}\frac{\text{ch}\pi x-\cos\pi x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\pi\text{sh}\pi x+\pi\sin\pi x}{2x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\pi^2\operatorname{ch}\pi x+\pi^2\cos\pi x}{2}=\pi^2.$$

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}}{\frac{1}{n^2}}\cdot\ln\left[1+\left(\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}-1\right)\right]^{\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}}$$

$$\cdot\lim_{n\to\infty}\ln\left[1+\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}-1\right)\right]^{\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}}$$

$$=\pi^2.$$

于是存在 $M>0, N>0$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{a_n}{\frac{1}{n^2}}\right|<M,$$

即 $$|a_n|<M\frac{1}{n^2}.$$

所以原级数收敛.

【2638】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$.

解 由 Stirling 公式

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\Gamma(x+1)}{\left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^x\sqrt{2\pi x}}=1,$$

有存在 $N>0$，当 $n>N$ 时

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\left(\frac{n}{e}\right)^{x}\sqrt{2\pi n}}>\frac{1}{2},$$

即 $$n!>\frac{\sqrt{2\pi n}}{2}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}>\left(\frac{n}{e}\right)^{n},$$

于是 $$\frac{n!}{n\sqrt{n}}>\frac{1}{e^{n}}n^{n-\frac{3}{2}},$$

令 $$C_n=\frac{1}{e^{n}}n^{n-\frac{3}{2}},$$

有 $$\sqrt[n]{C_n}=\frac{1}{e}n^{1-\frac{3}{2n}},$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{C_n}=+\infty,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_n$ 发散. 于是原级数发散.

【2639】 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^{n}}$.

解 因为

$$a_n=\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^{n}}=\frac{e^{(\ln n)^2}}{e^{n\ln(\ln n)}}=e^{-[n\ln(\ln n)-\ln^2 n]}.$$

由 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(\ln n)-\ln^2 n}{n}=+\infty,$$

知存在 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$n\ln(\ln n)-\ln^2 n\geqslant Mn,$$

其中 M 为大于零的常数，于是有

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^2}}=\frac{n^2}{e^{n\ln(\ln n)-\ln^2 n}}\leqslant\frac{n^2}{e^{Mn}}\to 0\qquad(n\to\infty).$$

从而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^{n}}$ 收敛.

【2640】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}-\frac{b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\qquad(a>0,b>0,c>0)$.

解　由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}-\frac{b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{2}}{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}-\frac{1}{2}\left(\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{c^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)\right]$$

$$=\ln a-\frac{1}{2}(\ln b+\ln c)=\ln\frac{a}{\sqrt{bc}},$$

若 $a\neq\sqrt{bc}$ 时，有

$$\ln\frac{a}{\sqrt{bc}}\neq 0,$$

于是 n 很大时，原级数的项不变号. 故当 $a\neq\sqrt{bc}$ 时，有原级数发散.

若 $a=\sqrt{bc}$，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{2}(b^{\frac{1}{2n}}-c^{\frac{1}{2n}})^2\right]$,

又由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(b^{\frac{1}{2n}}-c^{\frac{1}{2n}})^2}{2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{b^{\frac{1}{2n}}-c^{\frac{1}{2n}}}{\frac{1}{n}}\right)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{(b^{\frac{1}{2n}}-1)}{\frac{1}{n}}-\frac{c^{\frac{1}{2n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln b-\frac{1}{2}\ln c\right)^2=\frac{1}{8}(\ln b-\ln c)^2,$$

所以当 $a=\sqrt{bc}$ 时，原级数收敛.

【2641】　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^{n^a}-1)$.

解　若 $a\geqslant 0$，$n^{n^a}-1\to+\infty$（当 $n\to\infty$ 时）.
所以该级数发散.

若 $-1\leqslant\alpha<0$,由

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{x^{\alpha}}-1}{\frac{1}{x^{|\alpha|}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|\alpha|}}}-1}{\frac{1}{x^{|\alpha|}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|\alpha|}}}\left(\frac{1}{x^{|\alpha|+1}}-|\alpha|\frac{\ln x}{x^{|\alpha|+1}}\right)}{-|\alpha|\cdot\frac{1}{x^{|\alpha|+1}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x^{|\alpha|}}}\left[-\frac{1}{|\alpha|}(1-|\alpha|\ln x)\right]\to+\infty,$$

于是我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{|\alpha|}}}=+\infty$.

从而存在 $M>0,N>0$,当 $n>N$ 时,有

$$a_n>M\frac{1}{n^{|\alpha|}},$$

由 $-1\leqslant\alpha<0$ 知,原级数发散.

若 $\alpha<-1$,取 β,使 $\alpha<\beta<-1$,于是 $|\alpha|>|\beta|>1$,由

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{x^{\alpha}}-1}{\frac{1}{x^{|\beta|}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|\alpha|}}}-1}{\frac{1}{x^{|\beta|}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|\alpha|}}}\left(\frac{1}{x^{|\alpha|+1}}-|\alpha|\cdot\frac{\ln x}{x^{|\alpha|+1}}\right)}{-|\beta|\cdot\frac{1}{x^{|\beta|+1}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x^{|\alpha|}}}\left(\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|\frac{\ln x}{x^{|\alpha|-|\beta|}}-\frac{1}{|\beta|}\cdot\frac{1}{x^{|\alpha|-|\beta|}}\right)=0,$$

有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{|\beta|}}}=0.$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{|\beta|}}$ 收敛.故当 $\alpha<-1$ 时,原级数收敛.

【2642】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\ln\frac{1}{n^{\alpha}}-\ln\left(\sin\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\right]$.

解　设

$$a_n=\ln\frac{1}{n^\alpha}-\ln\left(\sin\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

由题意有 $\alpha\geqslant 0$.

(1) 当 $\alpha=0$ 时，$a_n=-\ln\sin 1>0$，该级数发散.

(2) 当 $\alpha>0$ 时

$$a_n=\ln\left(\frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\sin\frac{1}{n^\alpha}}\right)=\ln\left[1+\left(\frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\sin\frac{1}{n^\alpha}}-1\right)\right]$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\sin\frac{1}{n^\alpha}}-1\right)\ln\left[1+\left(\frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\sin\frac{1}{n^\alpha}}-1\right)\right]^{\frac{\sin\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}-\sin\frac{1}{n^\alpha}}}$$

因　$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^\alpha}{\sin x^\alpha}-1}{x^{2\alpha}}\xlongequal{t=x^\alpha}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{\sin t}-1}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^2\sin t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3}$$

$$=\frac{1}{6},（因 \sin t\sim t，当 t\to 0 时）$$

于是　$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{2\alpha}}}=\frac{1}{6},$$

故当 $\alpha>\frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\ln\frac{1}{n^\alpha}-\ln\left(\sin\frac{1}{n^\alpha}\right)\right]$ 收敛.

当 $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\ln\frac{1}{n^\alpha}-\ln\left(\sin\frac{1}{n^\alpha}\right)\right]$ 发散.

【2643】　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{-(b\ln n+c\ln^2 n)}$　$(a>0)$.

解　设 $a_n=a^{-(b\ln n+c\ln^2 n)}$，

当 $a=1$ 时，$a_n=1$，于是该级数发散.

当 $a \neq 1$ 时，因为

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = (b + c\ln n)\ln a,$$

由对数判别法(2615 的结论) 有

① 当 $c = 0, b\ln a > 1$，即 $a^b > \mathrm{e}$ 时，原级数收敛.

当 $c = 0, b\ln a \leqslant 1$，即 $a^b \leqslant \mathrm{e}$ 时，原级数发散.

② 当 $c \neq 0, c\ln a > 0$，即 $a^c > 1$ 时，原级数收敛.

当 $c \neq 0, c\ln a < 0$，即 $a^c < 1$ 时，原级数发散.

【2644】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}} \qquad (a > 0, b > 0).$

解 设

$$a_n = \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}},$$

由 $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{a+b}}} = \lim_{n\to\infty} n^{a+b} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2n+a+b}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+b}\left(1+\frac{b}{n}\right)^{n+a}} = \frac{1}{\mathrm{e}^a \cdot \mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{-(a+b)},$$

当 $a + b > 1$ 时，原级数收敛，当 $a + b \leqslant 1$ 时，原级数发散.

【2645】 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1)!]^n}{2! \cdot 4! \cdots (2n)!}.$

解 设

$$a_n = \frac{[(n+1)!]^n}{2! \cdot 4! \cdots (2n)!},$$

因为 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^n}{(2n+2)!}$,

而 $$\frac{(n+2)^n}{(2n+2)!} < \frac{(n+2)^n}{(n+3)\cdots(2n+2)} < \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n,$$

又 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+3}\right)^{n+3-3} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1,$$

$\therefore \overline{\lim_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$

由 2592 结论知原级数收敛.

研究以下带有一般项的级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛性(2646 ~ 2652).

【2646】 $u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \dfrac{\sqrt{x}\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解　因为

$$0 < u_n \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = n^{-\frac{3}{2}},$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

【2647】 $u_n = \dfrac{1}{\int_b^n \sqrt[4]{1+x^4}\mathrm{d}x}$.

解　因为

$$0 < u_n = \frac{1}{\int_b^n \sqrt[4]{1+x^2}\mathrm{d}x}$$

$$= \frac{1}{\int_b^0 \sqrt[4]{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_0^n \sqrt[4]{1+x^2}\mathrm{d}x},$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的散敛性和$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\int_0^n \sqrt[4]{1+x^2}\mathrm{d}x}$ 敛散性相同.

又
$$\frac{1}{\int_0^n \sqrt[4]{1+x^2}\mathrm{d}x} < \frac{1}{\int_0^n \sqrt[4]{x^2}\mathrm{d}x} = \frac{2}{3n^{\frac{3}{2}}},$$

由$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛,知级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

【2648】 $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \dfrac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$.

解　因为

$$u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2(n+1)}>0,$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

【2649】 $u_n=\int_n^{n+1}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$

解 因为

$$0<u_n=\int_n^{n+1}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x\leqslant\int_n^{n+1}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\sqrt{n}},$$

又由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{e}^{\sqrt{n}}}=0,$

于是我们有 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

【2650】 $u_n=\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin^3 x}{1+x}\mathrm{d}x.$

解 令 $f(x)=\sin^3 x,$

由于 $f'(x)=3\sin^2 x\cos x,$

在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内大于零，于是 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{n}\right)(n\geqslant 2)$ 内单调增加，由此我们有，当 $n\geqslant 2$ 时，

$$0\leqslant u_n=\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin^3 x}{1+x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{n}}\sin^3 x\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\sin^3\frac{\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}\leqslant\left(\frac{\pi}{n}\right)^4.$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-4}$ 收敛，知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

【2651】 $u_n=\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}.$

解 由

$$0<u_n=\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$$

$$\leqslant\frac{n\cdot n!}{n!(n+1)\cdots(2n)}=\frac{n}{(n+1)\cdots(2n)}$$

$$<\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n},$$

知级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

【2652】 $u_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln^2 k}{n^\alpha}$.

解　因为

$$0<u_n\leqslant\frac{n\ln^2 n}{n^\alpha}=\frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}},$$

于是我们可考察$\alpha>2$时的情形，由$\alpha>2$，我们有$\delta>0$，使得$\alpha-1-\delta>1$，从而有

$$\frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}}=\frac{\frac{\ln^2 n}{n^\delta}}{n^{\alpha-1-\delta}},$$

由　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n^\delta}=0$，

知，存在$M>0$，当$n>N$时，有

$$\frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}}\leqslant\frac{M}{n^{\alpha-1-\delta}},$$

故当$\alpha>2$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

下面考察$\alpha\leqslant 2$时情形，当n充分大时，有

$$u_n\geqslant\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n^2}=\frac{\ln n!}{n^2},$$

由 Stirling 公式，$\exists n_0 > 0$，当 $n > n_0$ 时有

$$n! > \frac{1}{2}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

于是
$$u_n \geqslant \frac{\ln\left[\frac{1}{2}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]}{n^2}$$

$$= \frac{\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}[\ln(2\pi) + \ln n] + n\ln\frac{n}{e}}{n^2}$$

$$> \frac{\ln\frac{n}{e}}{n} > \frac{1}{n} > 0,\quad (\text{当 } n \text{ 充分大时}).$$

故当 $\alpha \leqslant 2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

用相应的级数代替序列 $x_n (n = 1,2,\cdots)$，**研究它们的收敛性，若**(2653 ~ 2655).

【2653】 $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$

解 由

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2} = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right),$$

令 $x_0 = 0$，有 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})$，

又由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，即 $\{x_n\}$ 收敛.

【2654】 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln n)^2}{2}.$

解 由

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\{(\ln n)^2 - [\ln(n-1)]^2\}$$

$$= \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\ln\frac{n}{n-1}\cdot\ln(n(n-1))$$

$$= \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(\ln n^2 + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(2\ln n - \frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \frac{\ln n}{n} - \left\{\frac{\ln n}{n}+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right\} = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right),$$

因为$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$收敛. 故$x_n = \sum\limits_{k=2}^{n}(x_k - x_{k-1})$收敛.

【2655】 若

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$;(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(n+1)!}$;(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}$.

大约需要取级数多少项作为它的和才能精确到10^{-5}.

解 (1) 余项

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$$

$$= \sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{N}.$$

令 $\frac{1}{N} < 10^{-5}$,

有 $N > 10^5$.

故大约取 10^5+1 项即可达到要求.

(2) 余项

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{2n}{(n+1)!} < \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{2n}{(n-1)n^2}$$

$$= \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{2}{(n-1)n} = \frac{2}{N},$$

令$\frac{2}{N} < 10^{-5}$,有$N > 2\times10^5$,故大约取$2\times10^5+1$项,其精

度满足 10^{-5}.

(3) 余项 $R_N=\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}$,

由 Stirling 公式有

$$k!>\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^k,(k=1,2,\cdots).$$

于是
$$R_N<\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{e}}{2n-1}\right)^{2n-1}\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{e}}{2N+1}\right)^{2n-1}$$
$$=\left(\frac{\mathrm{e}}{2N+1}\right)^{2N+1}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{e}}{2N+1}\right)^{2s},$$

当 $N\geqslant 1$ 时,$\frac{\mathrm{e}}{2N+1}<1$,

于是
$$R_N<\left(\frac{\mathrm{e}}{2N+1}\right)^{2N+1}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{\mathrm{e}}{2N+1}\right)^2},$$

经计算,令 $N=5$ 时

$$R_N<\left(\frac{\mathrm{e}}{11}\right)^{11}\cdot\frac{121}{113.614}\approx 10^{-6.64}<10^{-5}.$$

故级数取 5 项就能保证要求.

§2. 交错级数收敛性的判别法

1. 级数的绝对收敛性

级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \tag{①}$$

称为绝对收敛的,若级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \tag{②}$$

收敛此时级数 ① 也收敛. 绝对收敛级数的和与项相加的次序无关.

要确定级数 ① 的绝对收敛,将同号级数收敛性的已知判别法用于级数 ② 就够了.

若级数①收敛，而级数②发散，则级数①称为条件(非绝对)收敛. 通过重新排列级数各项顺序可以使条件收敛级数的和等于任意数(黎曼定理).

2. **莱布尼茨判别法** 若(1) $b_n \geqslant b_{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 及(2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$，则交错级数

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots + (-1)^{n-1}b_n + \cdots (b_n \geqslant 0),$$

收敛(一般来说非绝对)，在这种情况下，对于级数余项：

$$R_n = (-1)^n b_{n+1} + (-1)^{n+1} b_{n+2} + \cdots,$$

有如下估计

$$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1} \quad (0 \leqslant \theta_n \leqslant 1).$$

3. **阿贝尔判别法**

若(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；(2) 数 $b_n(n=1,2,\cdots)$ 形成单调有界序列，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \qquad ③$$

收敛.

4. **狄利克雷判别法** 若：(1) 部分和 $A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ 有界；(2) 当 $n \to \infty$ 时，b_n 单调地趋向于零，则级数③收敛.

【2656】 证明：非绝对收敛级数的各项可以不重新排列而分群组合，使所得出的新级数是绝对收敛的.

证 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为条件收敛，由柯西定理知给 $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{3}$，存在 $N_1 > 0$，对任意自然数 m_1，有

$$| a_{N_1+1} + \cdots + a_{N_1+m_1} | < \varepsilon_1,$$

给定 $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{3^2}$，$\exists N_2 > N_1$，使对任意自然数 m_2，有

$$| a_{N_2+1} + \cdots + a_{N_2+m_2} | < \varepsilon_2,$$

$\cdots,$

给定 $\varepsilon_k=\frac{1}{3^k}$，$\exists N_k>N_{k-1}$，使对任意自然数 m_k 有

$$|a_{N_k+1}+\cdots+a_{N_k+m_k}|<\varepsilon_k,$$

$\cdots,$

现取 $A_0=a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}$，

$A_1=a_{N_1+1}+a_{N_1+2}+\cdots+a_{N_2}$，

$\cdots,$

$A_k=a_{N_k+1}\cdots+a_{N_k+1}$，

$\cdots,$

则有 $|A_k|<\varepsilon_k=\frac{1}{3^k}\quad(k=1,2,\cdots)$，

且$\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k$ 是原级数的各项不变更其顺序而分群组合起来所得的新级数，因为$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}$ 收敛. 于是$\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k$ 绝对收敛.

【2657】 证明：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 满足下列条件：(1) 当 $n\to\infty$ 时，级数的一般项 a_n 趋向于零；(2) 不变更级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 原有的次序而重新组合所得出的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 是收敛的；(3) 在

$$A_n=\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i\qquad(1=p_1<p_2<\cdots),$$

中 a_i 的项数有界. 则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是收敛的.

证 设 A_n 中相加项的数目不超过某一固定的自然数 m，即

$$p_{n+1}-p_n\leqslant m\qquad(n=1,2,\cdots).$$

任意 $\varepsilon>0$，令 $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2m+1}$，因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，于是存在 M，当 $n\geqslant M$ 时，有 $|a_n|<\varepsilon_1$；

又由$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$的收敛性知，存在$N_1 > M$，当$n > N_1$及任意自然数p有

$$|A_n + A_{n+1} + \cdots + A_{n+p}| < \varepsilon_1,$$

现取$N = p_{N_1}$，当$n \geqslant N$时，任意自然数S，令

$$\Lambda_{n,s} = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+s},$$

由题意a_i必是某一个A_k中的项，令

$$S_{A_n} = \left\{ a_i \middle| A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \right\}$$
$$= \{A_n \text{ 中各项 } a_i \text{ 的全体}\},$$

于是当$i < j$时，若$a_i \in S_{A_k}$，$a_j \in S_{A_l}$，则有$k \leqslant l$，

现考察$\Lambda_{n,s}$中各项，首先

$$a_n \in S_{A_{N_1+r}} \qquad (r \geqslant 0),$$

其次
$$\Lambda_{n,s} = a_n + \cdots + a_{p_{N_1+r+1}-1} + A_{N_1+r+1} + \cdots + A_{N_1+r+q} + a_{p_{N_1+r+q+1}} + \cdots + a_{n+s},$$

令
$$B = a_n + \cdots a_{p_{N_1+r+1}-1},$$
$$B' = a_{p_{N_1+r+q+1}} + \cdots + a_{n+s},$$

显然B是A_{N_1+r}中一部分项之和，B'是$A_{N_1+r+q+1}$中一部分项之和，从而

$$|B| \leqslant (p_{N_1+r+1} - p_{N_1+r})\varepsilon_1 \leqslant m\varepsilon_1,$$
$$|B'| \leqslant (p_{N_1+r+q+2} - p_{N_1+r+q+1})\varepsilon_1 \leqslant m\varepsilon_1,$$
$$|A_{N_1+r+1} + \cdots + A_{N_1+r+q}| < \varepsilon_1,$$

于是当$n \geqslant N$，s为任意自然数有

$$|\Lambda_{n,s}| \leqslant |B| + |A_{N_1+r+1} + \cdots + A_{N_1+r+q}| + |B'|$$
$$< (2m+1)\varepsilon_1 = \varepsilon,$$

故由柯西收敛准则知$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛.

【2658】 证明：若将收敛级数的各项重新排列，使得其中每一项都离开其原位超过m个位置（这里m为预先给定的数），则这

个级数的和不变.

证 设原级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,重排后的级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$

令 $S_N=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sigma_N=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$,

由题意有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0,\lim_{N\to\infty}S_N=S.$$

现证 $\lim\limits_{N\to\infty}\sigma_N=S$,

我们规定 $\Lambda_N=\sigma_N-S_N$,任给 $\varepsilon>0$,取 $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2m}>0$,则存在 $M>0$,当 $n\geqslant M$ 时,有 $|a_n|<\varepsilon_1$,现取 $N\geqslant M+2m$,又我们定义 S_k 内各 a_n 项元素组成的集合为 $\widetilde{S}_k$,σ_k 内各 b_n 项元素组成的集合为 $\tilde{\sigma}_k$,于是有

$$\Lambda_N=\sum_{b_n\in\tilde{\sigma}_k}b_n-\sum_{a_n\in\widetilde{S}_N}a_n,$$

现看 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 各项,我们知道每一个 a_i 被重排成 b_j 时,i 与 j 的标号差不超过 m. 因此,对每一个 a_i 总可以在 b_i 的前后各不超过 m 个元素内找到一个 $b_j=a_i$,反之,看 $b_1,b_2,\cdots,b_N$ 各项,对每一个 b_j 总可以在 a_j 的前后各不超过 m 个元素内找到一个 $a_i=b_j$,但有这样的情形:最后一段不超过 m 个元素的 a_i,即 a_{N-m},$a_{N-m+1},\cdots,a_N$ 内若干个元素可能被迁到 b_N 之后,从而在 $\tilde{\sigma}_N$ 内找不到对应的搬迁元素,但个数不超过 m,同样在最后一段不超过 m 个元素的 b_j,即 $b_{N-m},b_{N-m+1},\cdots,b_N$ 之内若干个元素在 $\widetilde{S}_N$ 内找不到搬迁元素,但个数不超过 m,于是

$$|\Lambda_N|=\left|\sum_{\substack{b_n\in\tilde{\sigma}_N\\ b_n\notin\widetilde{S}_N}}b_n-\sum_{\substack{a_n\in\widetilde{S}_N\\ a_n\notin\tilde{\sigma}_N}}a_n\right|\leqslant\sum_{\substack{b_n\in\tilde{\sigma}_N\\ b_n\notin\widetilde{S}_N}}|b_n|+\sum_{\substack{a_n\in\widetilde{S}_N\\ a_n\notin\tilde{b}_N}}|a_n|$$

$$<m\varepsilon_1+m\varepsilon_1=\varepsilon,$$

其中上式中 a_n 的下标 $n\geqslant M+m>M$, 同样 b_n 的下标 $n\geqslant M+$

m. 由 b_n 是由某个 a_i 搬迁而来，i 在 n 的前后距离不超过 m，于是 $i \geqslant M$，故 $|b_n|=|a_i|<\varepsilon_i$，于是上述不等式成立，所以 $\lim\limits_{N\to\infty}\Lambda_N=0$，于是有 $\lim\limits_{N\to\infty}\sigma_N=\lim\limits_{N\to\infty}S_N=S$.

证明下列级数的收敛性并求出它们的和(2659 ～ 2661).

【2659】 $1-\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{4}-\dfrac{7}{8}+\cdots$.

证　因为

$$S_n=1-\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}-\frac{7}{2^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}-\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}-\cdots+(-1)^{n-2}\frac{2n-3}{2^{n-1}}+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n},$$

将上述两式相加有

$$\frac{3}{2}S_n=1-\frac{2}{2}+\frac{2}{2^2}-\frac{2}{2^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2}{2^{n-1}}+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n},$$

于是我们得到

$$3S_n=\frac{2}{2}-\frac{2}{2^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2}{2^{n-2}}+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}}$$

$$=\frac{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{2}{9}$，故原级数收敛，其和为 $\dfrac{2}{9}$.

【2660】 $1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{32}+\cdots$.

证　易知该级数绝对收敛，从而该级数收敛，令该和为 S

由　$$S_{3n}=\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-3}}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-2}}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\cdots\frac{1}{2^{3n-1}}\right)$$

$$=\frac{1-\dfrac{1}{2^{3n}}}{1-\dfrac{1}{2^3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\dfrac{1}{2^{3n}}}{1-\dfrac{1}{2^3}}-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1-\dfrac{1}{2^{3n}}}{1-\dfrac{1}{2^3}}$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}},$$

有 $$S=\lim_{n\to\infty}S_{3n}=\frac{10}{7}.$$

【2661】 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots.$

提示:运用公式

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\ln n+e_n$$

(这里 C 为欧拉常数和 $\lim\limits_{n\to\infty}e_n=0$).

证 由交错级数判别法知该级数收敛,设其和为 S,

由 $$S_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$

$$=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=C+\ln 2n+e_{2n}-(C+\ln n+e_n)$$

$$=\ln 2+e_{2n}-e_n,$$

有 $$S=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\ln 2.$$

【2662】 已知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2,$$

求出由于其各项重新排列的结果得出的级数的和:

(1) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$

和 (2) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots.$

解 (1) 由

$$S_{3n}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$$

$$+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}$$

$$=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right),$$

又令 $\sigma_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$,

$$l_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n},$$

于是有 $l_{2n}=\sigma_{2n}-\sigma_n$, $l_{4n}=\sigma_{4n}-\sigma_{2n}$,

我们得到 $S_{3n}=\sigma_{4n}-\frac{1}{2}\sigma_{2n}-\frac{1}{2}\sigma_n$

$$=(\sigma_{4n}-\sigma_{2n})+\frac{1}{2}(\sigma_{2n}-\sigma_n)=l_{4n}+\frac{1}{2}l_{2n},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}l_{4n}+\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}l_{2n}=\ln2+\frac{1}{2}\ln2=\frac{3}{2}\ln2.$

又由 2658 题知该级数收敛,故该级数的和为$\frac{3}{2}\ln2$.

(2) 由 $S_{3n}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots$

$$+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}$$

$$=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4n}\right)$$

$$=\sigma_{2n}-\frac{1}{2}\sigma_n-\frac{1}{2}\sigma_{2n}=\frac{1}{2}(\sigma_{2n}-\sigma_n)=\frac{1}{2}l_{2n},$$

有 $$\lim_{n\to\infty}S_{3n}=\frac{1}{2}\ln 2.$$

又由 2658 题知该级数收敛,故该级数的和为$\frac{1}{2}\ln 2$.

【2663】 收敛级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$的各项经重新排列后,使其成为发散级数.

解 级数重排如下

$$(*)1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}+\cdots,$$

对(*)级数每相邻三项加括号后得一新级数(* *)

$$(**)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)+\cdots,$$

其通项为$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}$.

因为 $$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}>\frac{2}{\sqrt{4n}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}>0,$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散,故$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$发散.

所以级数(*)发散.

研究下列交错级数的收敛性(2664 ~ 2673).

【2664】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$.

解 因为

$$\left|\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n},$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛,故该级数绝对收敛,所以该级数收敛.

【2665】 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$.

解 由

$$a_n=(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n,$$

有 $$|a_n|=\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n,$$

又 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+100}{3n+1}=\frac{2}{3}<1,$$

所以该级数绝对收敛,故该级数收敛.

【2666】 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\cdots$.

解 对该级数相邻三项加括号后得级数

$$(*)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right)-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}\right)+\cdots,$$

显然级数(*)是交错级数且满足莱布尼兹条件,故(*)收敛,由2657的结论,知原级数收敛.

【2666.1】 设

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n, \tag{①}$$

其中 $b_n>0$，当 $n\to\infty$ 时，$b_n\to 0$，由此能得出级数①是收敛的吗？研究例题：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2+(-1)^n}{n}.$$

解 级数①不一定收敛，如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2+(-1)^n}{n}$，显然

$$b_n=\frac{2+(-1)^n}{n}\to 0(\text{当 } n\to\infty)\text{ 且 } b_n>0(n=1,2,\cdots),$$

对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2+(-1)^n}{n}$ 从第 2 项起，每相邻两项加括号得

$$(*)-1+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{3}{6}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{3}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)+\cdots,$$

(*)的通项为

$$\frac{3}{2n}-\frac{1}{n+1}\qquad(n=1,2,\cdots).$$

因为
$$\frac{3}{2n}-\frac{1}{2n+1}>\frac{3}{2n}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}>0$$

知级数

$$(*)\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{3}{6}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{3}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)+\cdots.$$

发散，所以(*)发散，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2+(-1)^n}{n}$ 发散.

【2667】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^{100}n}{n}\sin\dfrac{n\pi}{4}.$

解 因为 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{\ln^{100}n}{n}$ 单调递减且趋于零，且级数

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi}{4}\right|=\left|\frac{\cos\frac{\pi}{8}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{8}}\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}}\text{ 有界，从}$$

而由狄利克雷判别法知原级数收敛.

【2668】 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$.

解　因为

$$(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}=(-1)^n\left[\frac{1-\cos 2n}{2n}\right]$$
$$=(-1)^n\frac{1}{2n}+(-1)^{n+1}\frac{\cos 2n}{2n},$$

由莱布尼兹判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n}$ 收敛.

下面考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2n}{2n}$ 的敛散性.

令 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2n}{2n}$ 的部分和为 S_N，则

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2n}{2n}$$
$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{\cos 2n}{2n}-\sum_{n=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\frac{2\cos 4n}{4n}$$
$$=S_N^{(1)}-S_N^{(2)}.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2n},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4n}{2n}$ 皆收敛，事实上

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\right|=\left|\frac{\sin(2k+1)-\sin 1}{2\sin 1}\right|\leqslant\frac{1}{\sin 1}$$

且 $\frac{1}{2n}$ 单调趋于零，故由狄利克雷判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2n},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4n}{2n}$ 皆收敛，于是 $\lim_{N\to\infty}S_N^{(1)}$ 和 $\lim_{N\to\infty}S_N^{(2)}$ 皆存在，故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2n}{2n}$ 收敛，于是原级数收敛.

【2669】 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$.

解 因为

$$\frac{1}{1+\frac{100}{n}}=1-\frac{100}{n}+\left(\frac{100}{n}\right)^2+\cdots$$

$$=1+o\left(\frac{100}{n}\right)\qquad(n\text{ 很大时}),$$

所以 $$(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right),$$

由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$的收敛性知原级数收敛.

【2670】 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

解 因为

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$$

$$=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right),$$

又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$皆收敛,但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,

知原级数发散.

【2671】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})$.

解 由

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})=\sin\left(n\pi\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right)$$

$$=\sin\left(n\pi\left(1+\frac{k^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)$$

$$=\sin\left(n\pi+\frac{k^2\pi}{2n}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$=(-1)^n\sin\left(\frac{k^2\pi}{2n}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$=(-1)^n\frac{k^2\pi}{2n}+o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

知原级数收敛.

【2672】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.

解　该级数展开后为

$$-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$$

$$-\frac{1}{11}-\frac{1}{12}-\frac{1}{13}-\frac{1}{14}-\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\cdots,$$

即首先出现三个负项，之后出现五个正项，再后出现七个负项，如此等等，现将这些相邻且具有相同符号的几项合并成一项，于是得一交错级数为

$$\sum_{K=1}^{\infty}(-1)^K\left(\frac{1}{K^2}+\frac{1}{K^2+1}+\cdots+\frac{1}{(K+1)^2-1}\right)\quad(*),$$

而

$$\underbrace{\frac{1}{K^2}+\frac{1}{K^2+1}+\cdots+\frac{1}{K^2+K-1}}_{K\text{ 项}}$$

$$+\underbrace{\frac{1}{K^2+K}+\cdots+\frac{1}{(K+1)^2-1}}_{(K+1)\text{ 项}}$$

$$<K\cdot\frac{1}{K^2}+(K+1)\cdot\frac{1}{K^2+K}=\frac{2}{K},$$

$$\underbrace{\frac{1}{K^2}+\frac{1}{K^2+1}+\cdots+\frac{1}{K^2+K-1}}_{K\text{ 项}}$$

$$+\underbrace{\frac{1}{K^2+K}+\cdots+\frac{1}{(K+1)^2-1}}_{(K+1)\text{ 项}}$$

$$>K\cdot\frac{1}{k^2\cdot K}+(K+1)\frac{1}{(K+1)^2}=\frac{2}{K+1},$$

所以(*)的通项 $|a_K|$ 满足

$$\frac{2}{K+1}<|a_K|<\frac{2}{K}.$$

于是(*)满足莱布尼兹条件,从而级数(*)收敛,又原级数的部分和包含在级数(*)的相邻两部分和之间,由此知原级数收敛.

【2673】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,$$

知该级数发散.

【2673.1】 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}\cos\frac{\pi n^2}{n+1}$.

解 因为

$$\cos\frac{n^2\pi}{n+1}=\cos\frac{(n^2-1)\pi+\pi}{n+1}$$

$$=\cos\left((n-1)\pi+\frac{\pi}{n+1}\right)=(-1)^{n-1}\cos\frac{\pi}{n+1}$$

$$=(-1)^{n-1}\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}\right)$$

而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln^2 n}$ 与 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{2\sin^2\frac{\pi}{2(n+1)}}{\ln^2 n}$

收敛,从而原级数收敛.

【2674】 证明:若

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

其中 $p>0$(见 2606(H))

则交错级数

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots + (-1)^{n-1} b_n + \cdots (b_n > 0)$$

是收敛的.

解 由 $\dfrac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \dfrac{\rho}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$,

知 $b_n > b_{n+1}$，即 $\{b_n\}$ 单调递减.

又由 $$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1\right) = \rho,$$

知 $$b_n = o\left(\frac{1}{n^{\rho-\varepsilon}}\right) \qquad (\varepsilon > 0)(2606\text{ 结论}).$$

于是有 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$，由莱布尼兹判别法知交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ 收敛.

研究下列级数的绝对(2690 题除外)收敛和条件收敛(2675 ~ 2692).

【2675】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$;

解 当 $p < 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} n^{-p} = \infty$，故该级数发散.

当 $p = 0$ 时，$n^{-p} = 1$，故该级数发散.

当 $0 < p \leqslant 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 为交错级数且满足莱布尼兹条件. 该级数收敛，又

$$\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n} \qquad (0 < p \leqslant 1),$$

知该级数为条件收敛.

当 $p > 1$ 时，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 收敛，故该级数绝对收敛.

【2676】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$;

解 由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}}{\dfrac{1}{n^p}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$,

知当 $p>1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ 绝对收敛,当 $p\leqslant 0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}\right)$不存在或不为零,故该级数发散.

当 $0<p\leqslant$ 时,级数通项为$\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$,

由 2675 知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$收敛,又$\left\{\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}\right\}$为递增且趋于1的叙列,故由阿贝尔判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$收敛.

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}}{\dfrac{1}{n^p}}=1$,

知当 $0<p\leqslant 1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ 发散. 故该级数在 $0<p\leqslant 1$ 条件下为条件收敛.

【2677】 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right]$;

解 由 $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)=\dfrac{(-1)^n}{n^p}-\dfrac{1}{2n^{2p}}+O\left(\dfrac{1}{n^{3p}}\right)$

知只要考虑如下三级数

①$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p}$ ②$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2p}}$ ③$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3p}}$

(1) 当 $p>1$时,级数①,②,③皆绝对收敛. 于是当 $p>1$时,原级数绝对收敛.

(2) 当$\dfrac{1}{2}<p\leqslant 1$时,级数①条件收敛,级数②及③绝对收

敛，于是当$\frac{1}{2}<p\leqslant 1$时，原级数条件收敛.

(3) 当$0<p\leqslant\frac{1}{2}$时，存在$m\in IN$，使得

$$mp\leqslant 1<(m+1)p$$

又我们知道

$$(*)\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$$
$$=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2p}}+\frac{1}{3}\frac{(-1)^{3n}}{n^{3p}}$$
$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^{4p}}+\cdots+\frac{1}{m}\cdot\frac{(-1)^{mn}}{n^{mp}}+o\left(\frac{1}{n^{(m+1)p}}\right),$$

于是级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{(m+1)p}}$收敛，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}}{n^{3p}}$，…，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{mn}}{n^{mp}}$条件收敛，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{4p}}$等(*)式奇数项面积组成的级数发散. 故当$0<p\leqslant\frac{1}{2}$时，原级数发散.

(4) 当$p\leqslant 0$时，$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)\not\to 0(n\to\infty)$，

知原级数发散. 综上所述，当$p>1$时，原级数绝对收敛；当$\frac{1}{2}<p\leqslant 1$时，原级数条件收敛；当$\rho\leqslant\frac{1}{2}$时，原级数发散.

【2678】 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$；

解 设$a_n=(-1)^{n-1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$，

由 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2}\sin x)^2}{\sqrt[n]{n}}=(\sqrt{2}\sin x)^2$，

知当$|\sqrt{2}\sin x|<1$，即$|x-n\pi|<\frac{\pi}{4}$时，原级数绝对收敛.

当 $|\sqrt{2}\sin x| = 1$，即 $|x - n\pi| = \frac{\pi}{4}$ 时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$，条件收敛.

当 $|\sqrt{2}\sin x| > 1$，令 $|\sqrt{2}\sin x| > \alpha > 1$，于是当 n 充分大时，

有 $$\sqrt[n]{|a_n|} \geqslant \alpha,$$

即 $$|a_n| \geqslant \alpha^n > 1,$$

于是 $a_n \nrightarrow 0$(当 $n \to \infty$ 时)，故原级数发散.

【2679】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$；

解 由题意要使该级数有意义，必有 $x+n \neq 0$，即 $x \neq -n(n=1,2,3,\cdots)$，于是要求 x 不为负整数，显然 x 不为负整数时，原级数条件收敛.

【2680】 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$；

解 由

$$\frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p} = \frac{(-1)^n}{n^p\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^p}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^p}\left[1 - \frac{p(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{p}{n^{p+1}} + o\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right),$$

知当 $0 < p \leqslant 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+2}}$ 收敛，于是原级数条件收敛.

当 $p > 1$ 时，$\frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p} = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$ 知原级数绝对收敛.

当 $p \leqslant 0$ 时，通项不趋于零，原级数发散.

【2681】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}]^p}$；

解　由

$$\frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}]^p}=\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right]^p$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}}-\frac{p}{n^{\frac{p+1}{2}}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}\right),$$

知当 $p>2$ 时，原级数绝对收敛，当 $p\leqslant 0$ 时，原级数发散.

下面考察 $1<p\leqslant 2$ 时的情形，显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}}$ 条件收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{p+1}{2}}}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}$ 收敛，知原级数条件收敛.

当 $0<p\leqslant 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}}$ 条件收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{p+1}{2}}}$ 发散，知原级数发散.

【2682】　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}$；

解　由 $\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}=\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\left(1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\right)^{-1}$

$$=\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\left(1-\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right)$$

$$=\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}-\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right),$$

知当 $p>\frac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$ 收敛，对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}$，由

于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$且$\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$单调减小,又

$$\left|\sum_{l=1}^{n}\sin\frac{l\pi}{4}\right|=\left|\frac{\cos\frac{\pi}{8}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{8}}\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}},$$

据狄利克雷判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}$收敛.因此,当$p>\frac{1}{2}$时,原级数收敛.

当$\frac{1}{2}<p\leqslant 1$时,由

$$\frac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p}\geqslant\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^p}=\frac{1}{2n^p}-\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{2n^p},$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^p}$收敛,知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\sin^2\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p}$发散.

于是有$\frac{1}{2}<p\leqslant 1$时,原级数条件收敛.

当$p>1$时,由$\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}=o\left(\frac{1}{n^p}\right)$,知原级数绝对收敛.

当$p\leqslant 0$时,原级数显然发散.

当$0<p\leqslant\frac{1}{2}$时,由

$$\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}\geqslant\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n}=\frac{1-\cos\frac{n\pi}{2}}{2n}=\frac{1}{2n}-\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{2n},$$

知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}$发散,与2677同样讨论有$0<p\leqslant\frac{1}{2}$时,原级数

发散.

【2683】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$;

解　由$(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}=(-1)^n\frac{1}{\sqrt[100]{n}}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)$

$$=(-1)^n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$$

$$=\frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}+O\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{100}}}\right),$$

又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{100}}}$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}$条件收敛，有原级数条件收敛.

【2684】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{n^{100}}{2^n}$;

解　由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{100}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{100}}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{100}=\frac{1}{2}<1,$$

有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{100}}{2^n}$收敛，于是原级数绝对收敛.

【2685】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$;

解　由$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{\frac{\ln n}{n^2}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2}}=1$,

知该级数的通项不趋于零，于是原级数发散.

【2686】 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}$;

解　因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0,$$

且$\left\{\frac{1}{\ln n}\right\}$单调下降.

又
$$\left|\sum_{k=2}^{n}\sin\frac{k\pi}{12}\right|=\left|\frac{\cos\frac{\pi}{24}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{12}}{2\sin\frac{\pi}{24}}\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\pi}{12}},$$
于是由狄利克雷判别法知该级数收敛.

又
$$\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}\right|\geqslant\frac{\sin^2\frac{n\pi}{12}}{\ln n}=\frac{1-\cos\frac{n\pi}{6}}{2\ln n}=\frac{1}{2\ln n}-\frac{\cos\frac{n\pi}{6}}{2\ln n},$$
而$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$发散,$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{6}}{\ln n}$收敛,故级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}\right|$发散,从而原级数仅为条件收敛.

【2687】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$;

解 令 $B_s=\{n\mid[\sqrt{n}]=s\},s=1,2,\cdots$,
于是 B_s 中元素满足
$$s^2\leqslant n<(s+1)^2,$$
从而 B_s 中的元素个数为 $2s+1$,

令 $v_s=\sum\limits_{n\in B_s}\frac{1}{n^p}$,则原级数按相邻同号项加括号后的级数为

$\sum\limits_{s=1}^{\infty}(-1)^s v_s$,下面考虑$\{v_s\}$ 的单调性,

由
$$v_s-v_{s+1}=\sum_{l=0}^{2s}\frac{1}{(s^2+l)^p}-\sum_{l=0}^{2(s+1)}\frac{1}{((s+1)^2+l)^p}$$
$$=\sum_{l=0}^{2s}\left\{\frac{1}{(s^2+l)^p}-\frac{1}{((s+1)^2+l)^p}\right\}$$

$$-\frac{1}{[(s+1)^2+2s+1]^p}-\frac{1}{[(s+1)^2+2s+2]^p}$$

$$=\sum_{l=0}^{2s}\frac{((s+1)^2+l)^p-(s^2+l)^p}{((s+1)^2+l)^p(s^2+l)^p}$$

$$-\frac{1}{[(s+1)^2+2s+1]^p}-\frac{1}{[(s+1)^2+2s+2]^p},$$

现令 $f(x)=x^r(r>1)$，设 $x>y>0$，有

$$x^r-y^r=r\xi^{r-1}(x-y)>ry^{r-1}(x-y),\xi\in(y,x)$$

于是，令 $r=2p,x=\sqrt{(s+1)^2+l},y=\sqrt{s^2+l}$，

当 $p>\frac{1}{2}$ 时有

$$((s+1)^2+l)^p-(s^2+l)^p$$

$$=(\sqrt{(s+1)^2+l})^{2p}-(\sqrt{s^2+l})^{2p}$$

$$\geqslant 2p\cdot(\sqrt{s^2+l})^{2p-1}\{\sqrt{(s+1)^2+l}-\sqrt{s^2+l}\}$$

$$=2p(\sqrt{s^2+l})^{2p-1}\cdot\frac{2s+1}{\sqrt{(s+1)^2+l}+\sqrt{s^2+l}}$$

$$\geqslant\frac{2ps^{2p-1}(2s+1)}{2\sqrt{s^2+4s+1}}\qquad(0\leqslant l\leqslant 2s),$$

故 $$v_s-v_{s+1}$$

$$\geqslant\frac{ps^{2p-1}(2s+1)^2}{(s^2+4s+1)^{2p+\frac{1}{2}}}-\frac{2}{(s^2+4s+2)^p}$$

$$\geqslant\frac{2s^{2p-1}\left(s^2+s+\frac{1}{4}\right)}{(s^2+4s+1)^{2p+\frac{1}{2}}}\left[2p-\frac{(s^2+4s+1)^{p+\frac{1}{2}}}{s^{2p-1}\left(s^2+s+\frac{1}{4}\right)}\right],$$

由 $2p>1,\lim\limits_{s\to+\infty}\dfrac{(s^2+4s+1)^{p+\frac{1}{2}}}{s^{2p-1}\left(s^2+s+\frac{1}{4}\right)}=1$，

知当 s 充分大时，$v_s-v_{s+1}>0$，于是存在 s_0，当 $s\geqslant s_0$ 时，v_s 是单调下降的叙列，又当 $n\in B_s,p>0$ 时有

$$\frac{1}{(s+1)^{2p}}<\frac{1}{n^p}\leqslant\frac{1}{s^{2p}},$$

于是 $$\frac{2s+1}{(s+1)^{2p}} < v_s \leqslant \frac{2s+1}{s^{2p}},$$

从而当 $p > \frac{1}{2}$ 时，v_s 单调下降且趋于 0，由此知级数

$$(*)\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s v_s,$$

收敛，显然当$\frac{1}{2} < p \leqslant 1$ 时，级数(*)为条件收敛，当 $p > 1$ 时，级数(*)为绝对收敛，当 $p \leqslant \frac{1}{2}$ 时级数(*)通项不趋于零，级数(*)发散.

设原级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$ 的前 N 项和为

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p},$$

(*)级数的前 M 项和为$\sigma_M = \sum_{s=1}^{M}(-1)^s v_s$，则任意一个部分和 S_N 均包含在某相邻两个部分和σ_M 和σ_{M+1} 之间，即

$$|S_N - \sigma_M| \leqslant |\sigma_{M+1} - \sigma_M|,$$

因为 $p > \frac{1}{2}$ 时，(*)级数收敛，记

$$\lim_{M\to\infty}\sigma_M = \sigma,$$

则 $$\lim_{N\to\infty}S_N = \lim_{M\to\infty}\sigma_M = \sigma,$$

所以原级数收敛. 于是当$\frac{1}{2} < p \leqslant 1$ 时，原级数条件收敛.

当 $p > 1$ 时，原级数绝对收敛.

当 $p \leqslant \frac{1}{2}$ 时，原级数发散.

【2688】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$;

解 令

$$A_k=\{n\mid[\ln n]=k\},k=1,2,\cdots,$$

于是　$k\leqslant \ln n<k+1,$

即　$e^k\leqslant n<e\cdot e^k,$

将 A_j 中的元素按从小到大排列，记作

$$n_k,n_k+1,\cdots,n_k+p_k-1.$$

其中　$p_k=[(e-1)e^k],$

现令　$u_k=\sum\limits_{n\in A_k}\frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}=(-1)^k\sum\limits_{n\in A_k}\frac{1}{n}=(-1)^k v_k,$

其中　$v_k=\sum\limits_{n\in A_k}\frac{1}{n}=\sum\limits_{l=0}^{p_k-1}\frac{1}{n_k+l}$

$$\geqslant\sum_{l=0}^{p_k-1}\frac{1}{e\cdot e^k}=\frac{p_k}{e\cdot e^k}=\frac{1}{e\cdot e^k}[(e-1)e^k]$$

$$\geqslant\frac{1}{e\cdot e^k}\cdot\frac{(e-1)e^k}{2}=\frac{e-1}{2e},$$

我们可以证明原级数发散，用反证法

设原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 N_0，当 $n\geqslant N_0$ 时，任意 $p\in\mathbb{N}$ 有

$$|a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon,$$

取 $\varepsilon=\frac{e-1}{4e}>0$，有相应的 N(与 $\frac{e-1}{4e}$ 有关)，

对 $n\geqslant N$ 中的 n 选一数 n_k，使 $n_k\in A_k$，即

$$e^k\leqslant n_k<e\cdot e^k,$$

又取自然数 $p=p_k-1$，则有

$$|a_{n_k}+a_{n_k+1}+\cdots+a_{n_k+p_k-1}|<\varepsilon,\qquad ①$$

但　$|a_{n_k}+a_{n_k+1}+\cdots+a_{n_k+p_k-1}|$

$$=|u_k|=v_k\geqslant\frac{e-1}{2e}=2\varepsilon>\varepsilon,\qquad ②$$

矛盾，故原级数发散.

【2689】　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right]^p;$

解 记

$$a_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}\right)^p,$$

当 $p \leqslant 0$ 时，显然 $|a_n| \geqslant 1$，原级数发散.

当 $0 < p \leqslant 2$ 时，令 $a_n = (-1)^{n-1}C_n$，其中

$$C_n = \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}\right)^p,$$

因为 $1 > \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p$，知

$$b_n > \left(\frac{2n+1}{2(n+1)}\right)^p b_n = b_{n+1} \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

且 $$0 < b_n < \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)^p \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

于是由莱布尼兹判别法知原级数收敛，又由 2598 题知当 $0 < p \leqslant 2$ 时，原级数条件收敛；$p > 2$ 时，原级数绝对收敛.

【2690】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}$；

解 因为 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 单调下降，且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

又 $$\left|\sum_{n=1}^{N} \sin n \cdot \sin n^2\right|$$
$$= \left|\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}(\cos n(n-1) - \cos n(n+1))\right|$$
$$= \left|\frac{1}{2}(1 - \cos N(N+1)\right| \leqslant 1,$$

于是由狄利克雷检验法知该级数收敛.

【2691】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n^2$；

提示：证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n^2 \neq 0$.

证 反证法，

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n^2=0$,

于是 $\sin^2(n^2)\to 0$,

从而 $\cos^2(n^2)\to 1(n\to\infty)$,

又 $\sin(n+1)^2$

$=\sin n^2\cos(2n+1)+\cos n^2\sin(2n+1)$,

于是 $\cos^2(n^2)\sin^2(2n+1)$

$=(\sin(n+1)^2-\sin n^2\cos(2n+1))^2$,

由 $\sin(n+1)^2\to 0,\qquad \cos^2(n^2)\to 1$,

有 $\sin^2(2n+1)\to 0$,

于是 $\sin(2n+1)\to 0$,

同理有 $\sin(2n-1)\to 0$,

又 $\sin(2n+1)+\sin(2n-1)=2\sin 2n\cos 1$,

有 $\sin 2n\to 0\qquad(n\to\infty)$,

由此有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=0$,

从而 $\sin^2 n\to 0$,

及 $\cos^2 n\to 1$,

又 $\sin(n+1)=\sin n\cos 1+\cos n\sin 1$,

当 $n\to\infty$ 时

$$\lim_{n\to\infty}\cos^2 n\sin^2 1=\sin^2 1\neq 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}(\sin(n+1)-\sin n\cos 1)^2=0,$$

矛盾,故 $\sin n^2\not\to 0$,

所以原级数发散.

【2692】 令

$$R(x)=\frac{a_0x^p+a_1x^{p-1}+\cdots+a_p}{b_0x^q+b_1x^{q-1}+\cdots+b_q}$$

为有理函数,其中 $a_0\neq 0,\quad b_0\neq 0$,当 $x\geqslant n_0$ 时,

$$|b_0x^q+b_1x^{q-1}+\cdots+b_q|>0$$

研究级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}(-1)^nR(n)$ 的绝对收敛和条件收敛性.

解 当 $q-p>1$ 时,有

$$|R(n)|=\left|\frac{a_0+a_1n^{-1}+\cdots+a_pn^{-p}}{b_0n^{q-p}+b_1n^{q-p-1}+\cdots+b_qn^{-p}}\right|$$

$$\sim\frac{|a_0|}{|b_0|n^{q-p}},$$

又 $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^{q-p}}$ 收敛,于是 $\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^nR(n)$ 绝对收敛.

当 $q\leqslant p+1$ 时,$\sum_{n=n_0}^{\infty}|R(n)|$ 发散;当 $p<q$ 时,$(-1)^nR(n)\sim(-1)^n\frac{a_0}{b_0n^{q-p}}$ 收敛,于是当 $p<q\leqslant p+1$ 时,$\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^nR(n)$ 条件收敛.

当 $p\geqslant q$ 时,显然通项 $R(n)$ 不趋于 0,于是级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^nR(n)$ 发散.

研究下列级数的收敛性(2693 ~ 2696).

【2693】 $\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}+\frac{1}{5^p}-\frac{1}{6^q}+\cdots.$

解 当 $p>1,q>1$,级数绝对收敛,

当 $0<p=q\leqslant1$ 时,级数条件收敛,

当 $pq\leqslant0$ 时,通项不趋于零,故级数发散.

【2694】 $1+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots.$

解 $p>1$,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ 交换项数重排即可得原级数,故原级数绝对收敛.

当 $0<p<1$,对原级相邻三项加括号组数新级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(4k-3)^p}+\frac{1}{(4k-1)^p}-\frac{1}{(2k)^p}\right),(*)$$

其通项 $\frac{1}{(4k-3)^p}+\frac{1}{(4k-1)^p}-\frac{1}{(2k)^p}$

$$=\frac{1}{(4k)^p\left(1-\frac{3}{4k}\right)^p}+\frac{1}{(4k)^p\left(1-\frac{1}{4k}\right)^p}-\frac{1}{(2k)^p}$$

$$=\frac{1}{(4k)^p}\left(1+\frac{3p}{4k}+1+\frac{p}{4k}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)-\frac{1}{(2k)^p}$$

$$=\frac{1}{(2k)^p}\left(\frac{1}{2^{p-1}}-1\right)+\frac{4p}{(4k)^{p+1}}+o\left(\frac{1}{k^{p+2}}\right), \quad ①$$

因为①式第一项 $\frac{1}{(2k)^p}\left(\frac{1}{2^{p-1}}-1\right)$ 组成级数发散，而 $\frac{4p}{(4k)^{p+1}}$ 组成的级数收敛. $O\left(\frac{1}{k^{p+2}}\right)$ 组成的级数也收敛，故(*)级数发散，从而原级数当 $0<p<1$ 时发散.

当 $p=1$ 时，①式为 $\frac{4p}{(4k)^2}+O\left(\frac{1}{k^3}\right)$. 故(*)级数收敛，而原级数的部分和必在(*)级数某相邻两个部分和之间，故原级数也收敛，显然不是绝对收敛.

当 $p\leqslant 0$ 时，原级数通项不趋于零，发散.

【2695】 $1+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{1^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{1}{3^p}+\frac{1}{9^p}+\frac{1}{11^p}-\frac{1}{5^p}+\cdots$.

解　与上题类似，原级数与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 具有相同的敛散性，其中

$$u_n=\frac{1}{(4n-3)^p}+\frac{1}{(4n-1)^p}-\frac{1}{(2n-1)^p}$$

$$=\frac{1}{(4n)^p}\left(2+\frac{p}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\frac{1}{(2n)^p}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^p}$$

$$=\frac{1}{(2n)^p}\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)+\frac{1}{2^p}\left(\frac{p}{2^p}-\frac{p}{2}\right)\cdot\frac{1}{n^{p+1}}+O\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right), \quad ①$$

当 $p>1$ 时，原级数显然绝对收敛，

当 $0<p<1$ 时，由①式第一项组成的级数发散，而由①式

第二项及第三项各组成的级数皆收敛，于是原级数当 $0 < p < 1$ 时发散，当 $p = 1$ 时，① 式为 $O\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right)$，收敛，从而原级数收敛，显然为条件收敛.

当 $p \leqslant 0$ 时，原级数发散.

【2696】 $1 - \frac{2}{2^q} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} - \frac{2}{5^q} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{2}{8^q} + \frac{1}{9^p} + \cdots$.

解 令 $S = \min(p,q) > 1$，

记级数 $$1 + \frac{2}{2^q} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{2}{5^q} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} + \frac{2}{8^q} + \frac{1}{9^p} + \cdots \quad ①$$

的前 N 项部分和 S_N，有

$$S_N \leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{2}{k^S} = 2\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^S} < \infty,$$

于是 $\{S_N\}$ 单调上升具且有界，从而当 $p > 1, q > 1$ 时，原级数绝对收敛，当 $0 < p = q \leqslant 1$ 时，级数 ① 发散，现考虑级数

$$\left(1 - \frac{2}{2^p}\right) + \sum_{k=1}^{N} u_k, \quad ②$$

其中 $$u_k = \frac{1}{(3k)^p} + \frac{1}{(3k+1)^p} - \frac{2}{(3k+2)^p}$$

$$= \frac{1}{(3k)^p}\left[1 - \left(1 + \frac{2}{3k}\right)^{-p}\right]$$

$$+ \frac{1}{(3k+1)^p}\left(1 - \left(1 + \frac{1}{3k+1}\right)^{-p}\right)$$

$$= \frac{1}{(3k)^p}\left(\frac{2p}{3k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) + \frac{1}{(3k+1)^p}\left(\frac{1}{3k+1} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)$$

$$= \frac{2p}{(3k)^{p+1}} + \frac{p}{(3k+1)^{p+1}} + O\left(\frac{1}{k^{p+2}}\right)$$

$$= \frac{3p}{(3k)^{p+1}} + O\left(\frac{1}{k^{p+2}}\right),$$

于是 $\sum_{k=1}^{N} u_k$ 收敛，与 2694 类似，原级数与级数 ② 有相同的敛散性，

于是原级数当 $0 < p = q \leqslant 1$ 时条件收敛.

当 $pq \leqslant 0$ 时，原级数发散.

【2697】 证明级数

(1) $\sin x + \dfrac{\sin 2x}{2} + \dfrac{\sin 3x}{3} + \cdots$;

(2) $\cos x + \dfrac{\cos 2x}{2} + \dfrac{\cos 3x}{3} + \cdots$.

在 $(0,\pi)$ 区间非绝对收敛.

证 (1) 因为

$$\left|\frac{\sin nx}{n}\right| \geqslant \frac{\sin^2 nx}{n} = \frac{1-\cos 2nx}{2n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n},$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n} = 0$，$\left\{\dfrac{1}{2n}\right\}$ 单调下降，$\sum\limits_{n=1}^{N}\cos 2nx$ 有界，于是由狄利克雷判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nx}{2n}$ 收敛；而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$ 发散，因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\sin nx}{n}\right|$ 发散，原级数显然在 $(0,\pi)$ 内收敛，于是原级数仅为条件收敛.

(2) 由

$$\left|\frac{\cos nx}{n}\right| = \frac{\cos^2 nx}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{\cos 2nx}{2n},$$

于是据 ① 有原级数在 $(0,\pi)$ 内仅为条件收敛.

【2698】 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}\qquad (0 < x < \pi).$$

对于所有参数 (px) 的总和确定：

(1) 绝对收敛域；

(2) 非绝对收敛域.

解 由

$$\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right| \leqslant \frac{1}{n^p}\cdot\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right| \leqslant \frac{1}{n^p}\qquad (0 < x < \pi).$$

知当 $p>1$ 时，这两个级数对任意 $x\in(0,\pi)$ 皆绝对收敛.

当 $0<p\leqslant1$ 时，据 $\left\{\dfrac{1}{n^p}\right\}$ 单调下降趋于零，及

$$\sum_{n=1}^{M}\cos nx,\ \sum_{n=1}^{M}\sin nx\ (0<x<\pi),$$

皆有界(任意 $M\in N$) 知这两级数均收敛，又

$$\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|\geqslant\frac{\cos^2 nx}{n^p}=\frac{1}{2n^p}+\frac{\cos 2nx}{2n^p}.$$

$$\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|\geqslant\frac{\sin^2 nx}{n^p}=\frac{1}{2n^p}-\frac{\cos 2nx}{2n^p}.$$

知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos nx|}{n^p},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin nx|}{n^p},$$

当 $0<p\leqslant1$ 时均发散，于是任意 $x\in(0,\pi)$，当 $0<p\leqslant1$ 时，两级数条件收敛.

当 $p\leqslant0$ 时，两级数显然发散，综上所述，绝对收敛域为 $(p,x)\in(1,\infty)\times(0,\pi)$，条件收敛域为 $(p,x)\in(0,1]\times(0,\pi)$.

【2698.1】 研究级数的收敛性：

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt[n]{n}}{\ln n}$；(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)}$；(3) $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty}\frac{\sin n}{n+10\sin n}$.

解 (1) 因为 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 单调下降趋近于 $1(n>3)$，

$\left\{\dfrac{1}{\ln n}\right\}$ 单调下降趋近于 $0\quad(n>1)$，

于是 $\qquad\dfrac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}>\dfrac{1}{n}\qquad(n>3)$，

故该级数条件收敛.

(2) 因为

$$\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)=\sin n\cos\frac{1}{n}+\cos n\sin\frac{1}{n}.$$

而$\sum_{k=1}^{M}\sin K$和$\sum_{k=1}^{M}\cos K$皆有界($\forall M\in \mathbb{N}$);$\left\{\frac{1}{\ln\ln n}\right\}$单调下降趋于零,于是由狄利克雷判别法知$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n}{\ln\ln n}$,$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos n}{\ln\ln n}$皆收敛.

又$\left\{\cos\frac{1}{n}\right\}$单调上升且有界,$\left\{\sin\frac{1}{n}\right\}$单调下降且有界,由阿贝尔判别法知$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n}{\ln\ln n}\cos\frac{1}{n}$,$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos n}{\ln\ln n}\sin\frac{1}{n}$皆收敛.

故原级数收敛. 又

$$\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)}\right|\geqslant\frac{\sin^2\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln\ln n}$$

$$=\frac{1-\cos\left(2n+\frac{2}{n}\right)}{2\ln\ln n}.$$

而$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln\ln n}$发散,$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\left(2n+\frac{2}{n}\right)}{2\ln\ln n}$收敛,故$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln\ln n}\right|$发散,所以原级数为条件收敛.

(3) 因为$\left|\frac{\sin n}{n+10\sin n}\right|>\frac{1}{n+10}$,

于是我们有$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n+10\sin n}\right|$发散. 又

$$\frac{\sin n}{n+10\sin n}=\frac{\sin n}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{10\sin n}{n}}$$

$$=\frac{\sin n}{n}-\frac{10\sin^2 n}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

因为$\sum_{n=10}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$,$\sum_{n=10}^{\infty}\frac{10\sin^2 n}{n^2}$,$\sum_{n=10}^{\infty}\frac{1}{n^3}$皆收敛;故原级数收敛且为条件收敛.

【2699】 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!n^q}.$$

确定：

(1) 绝对收敛域；

(2) 条件收敛域.

解 令

$$a_n=\frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!n^q},$$

由
$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{n+1}{n+1+p}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^q$$
$$=\left(1-\frac{p}{n+1+p}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^q$$
$$=\left(1-\frac{p}{n}+\frac{p(p+1)}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\cdot\left(1+\frac{q}{n}+\frac{q(q-1)}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$
$$=1+\frac{q-p}{n}+A_n, \qquad (*)$$

其中 $$A_n=\left(\frac{1}{2}q(q-1)-pq+p(p+1)\right)\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

据高斯判别法知，当 $q>p+1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，于是原级数绝对收敛，显然当 p 为负整数时，级数各项皆为零，收敛.

当 $q\leqslant p+1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，原级数不绝对收敛.

当 $p<q\leqslant p+1$ 时，由$(*)$式知当 n 足够大时 $a_n>a_{n+1}$，即存在 $n_0>0$，当 $n>n_0$ 时，$\{a_n\}$ 单调下降，现记 $q=p+\varepsilon,\varepsilon>0$. 于是有

$$a_n=\frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!n^{p+\varepsilon}},$$

从而有 $$\ln a_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{p}{k}\right)-(p+\varepsilon)\ln n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{p}{k} + \sum_{k=1}^{n} O\left(\frac{1}{k^2}\right) - (p+\varepsilon)\ln n$$

$$= p\ln n + pr + B + O\left(\frac{1}{n}\right) - p\ln n - \varepsilon\ln n$$

$$= pr + B + O\left(\frac{1}{n}\right) - \varepsilon\ln n \to -\infty \quad (n\to\infty),$$

其中 r,B 为常数. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 据莱布尼兹判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛,故当 $p<q\leqslant p+1$ 时,原级数条件收敛.

当 $q=p$ 时,

$$\ln a_n = pr + B + O\left(\frac{1}{n}\right) \to pr + B \quad (n\to\infty),$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{pr+B} \neq 0$,原级数发散.

当 $q<p$ 时,由(*)式知当 n 足够大时有 $a_n<a_{n+1}$. 于是通项也不趋向于零,故原级数发散.

综上所述,原级数的绝对收敛域为 $q>p+1$,条件收敛域为 $p<q\leqslant p+1$.

【2700】 研究级数的收敛性:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n},\text{其中}\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}.$$

解 令

$$a_n = \binom{m}{n},$$

有
$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{n+1}{m-n}\right| = 1 + \frac{m+1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

由高斯判别法知:当 $m+1>1$,即 $m>0$ 时,级数绝对收敛.

当 $m<0$ 时,级数不绝对收敛. 当 $m=0$ 时,级数的每一项皆为 0,收敛. 当 $-1<m<0$ 时,存在 n_0,当 $n>n_0$ 级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\binom{m}{n}$ 为交错级数,由 $-1<m<0$ 有 $\left|\frac{m-n}{n+1}\right|<1$,于是有 $|a_n+1|<$

$|a_n|$，即$\{|a_n|\}$是单调减少的. 又

$$\ln|a_n| = \ln\left|\frac{m(m-1)\cdots(m-n-1)}{n!}\right|$$

$$= \ln\left|\left(1-\frac{m+1}{1}\right)\left(1-\frac{m+1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{m+1}{n}\right)\right|$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{m+1}{k}\right),$$

因为 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\ln\left(1-\dfrac{m+1}{k}\right)}{-\dfrac{m+1}{k}} = 1$,

而$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}\to+\infty$. 于是有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{m+1}{k}\right)\to-\infty,$$

从而有$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$，由莱布尼兹判别法知原级数收敛，即当 $-1 < m < 0$ 时，原级数仅为条件收敛.

当 $m\leqslant -1$ 时，级数通项不趋于零，发散.

综上所述，$m\geqslant 0$ 时，级数绝对收敛，$-1<m<0$ 时，级数条件收敛.

【2701】 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n} = 1$，则能否确认级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 也是收敛的?

研究例题：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \qquad 及 \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right].$$

解 不一定，如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}\right]$发散，但

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1.$$

但如果$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$为收敛的正项级数，且$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$，则可断定$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$也收敛.

【2702】 设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$为非绝对收敛级数，且

$$P_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|+a_i}{2},N_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|-a_i}{2}.$$

证明：$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n}{P_n}=1$.

证 由题意$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$为条件收敛. 事实上，若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，则不定有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n}{P_n}=1,$$

如$a_i=1$，则$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n}{P_n}=0$. 故$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$为条件收敛.

由

$$\frac{N_n}{P_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}|a_i|-\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|+\sum_{i=1}^{n}a_i}=\frac{1-\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|}}{1+\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|}},$$

及$\sum_{i=1}^{\infty}a_i$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=+\infty$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n}{P_N}=\frac{1-\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|}}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|}}=1.$$

【2703】 证明：对于每个 $p>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 的和介于 $\dfrac{1}{2}$ 与 1 之间.

证 由

$$S_{2n}=\left(1-\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^p}\right),$$

中每一括号内的数皆为正数知 $\{S_{2n}\}$ 是单调上升序列，又

$$S_{2n}=1-\left(\frac{1}{2^p}-\frac{1}{3^p}\right)-\left(\frac{1}{4^p}-\frac{1}{5^p}\right)-\cdots$$
$$-\left(\frac{1}{(2n-2)^p}-\frac{1}{(2n-1)^3}\right)-\frac{1}{(2n)^p}<1,$$

即 $\{S_{2n}\}$ 有界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$ 存在且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}\leqslant 1$.

由莱布尼兹知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^p}(p>0)$ 收敛，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}\leqslant 1,$$

又由 $$S_{2n}=1-\frac{1}{2^p}+\overline{S}_{2n},$$

其中 $$\overline{S}_{2n}=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(2k-1)^p}-\frac{1}{(2k)^p}\right)$$
$$=\sum_{k=2}^{n}\frac{p}{(2k-1+\theta_k)^{p+1}},$$

这里 $0<\theta_k<1$(由拉格朗中值定理及得上式).

由 $p>0$ 有

$$\frac{1}{(2k-1+\theta_k)^{p+1}}\geqslant\frac{1}{(2k)^{p+1}}\qquad(k=2,3,\cdots),$$

于是 $$\overline{S}_{2n}\geqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{p}{(2k)^{p+1}}=\frac{p}{2^{p+1}}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^{p+1}}$$
$$\geqslant\frac{p}{2^{p+1}}\left(\int_2^n\frac{dx}{x^{p+1}}+\frac{1}{n^{p+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2^{2p+1}}-\frac{1}{2^{p+1}}\cdot\frac{1}{n^p}+\frac{p}{2^{p+1}}\cdot\frac{1}{n^{p+1}}$$

$$=\frac{1}{2^{2p+1}}-\frac{1}{2^{p+1}}\cdot\frac{1}{n^p}\left(1-\frac{p}{n}\right)=\frac{1}{2^{2p+1}}+O\left(\frac{1}{n^p}\right),$$

进一步,任意 $\varepsilon>0$,存在 N_0,当 $N\geqslant N_0$ 时,有 $\left|O\left(\frac{1}{n^p}\right)\right|<\varepsilon$. 从而有

$$S_{2n}=1-\frac{1}{2^p}+\overline{S}_{2n}\geqslant 1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^{2p+1}}-\varepsilon,$$

又由 $$2^{p-1}+\frac{1}{2^{p+1}}=\frac{2^{2p}+1}{2^{p+1}}>\frac{2\cdot 2^p}{2\cdot 2^p}=1,$$

有 $$2^p+\frac{1}{2^p}>2,$$

于是有 $$1+\frac{1}{2^{2p}}>\frac{2}{2^p},$$

即 $$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2p+1}}>\frac{1}{2^p},$$

于是 $$1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^{2p+1}}>\frac{1}{2},$$

从而 $$S_{2n}>\frac{1}{2}-\varepsilon,$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}\geqslant\frac{1}{2}-\varepsilon.$$

由 ε 的任意性,有

$$\frac{1}{2}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\leqslant 1.$$

【2703.1】 若

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$;(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^0}{\sqrt{n}}$.

解 (1) 由莱布尼茨判别法可知原级数收敛,且

$$|S-S_n|\leqslant\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}}.$$

因此要使 $|s-s_n|\leqslant 10^{-6}$，只需 $n\geqslant 10^6$ 即少部分和应该取级数的多少项可使所得到的和精确度到 $\sum = 10^{-6}$?

【2704】 证明：若将级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots.$$

的各项重新排列，使依次 p 个正项的一组与依次 q 个负项的一组相交替，则新级数的和将是 $\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

证 我们要证明

$$\begin{aligned}&1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{2q}\\&+\frac{1}{2p+1}+\cdots+\frac{1}{4p-1}-\frac{1}{2q+2}+\cdots\\&=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q},\end{aligned}\tag{①}$$

我们知道 $H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+C+\varepsilon_n$,

其中 C 为欧拉常数，$\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$，于是有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m}&=\frac{1}{2}H_m\\&=\frac{1}{2}\ln m+\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}\varepsilon_m,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}&=H_{2k}-\frac{1}{2}H_k\\&=\ln 2+\frac{1}{2}\ln k+\frac{C}{2}+\varepsilon_{2k}-\frac{1}{2}\varepsilon_k.\end{aligned}$$

考虑级数 ① 的前 $2n$ 项的和

$$\begin{aligned}S_{2n}=\;&1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2}-\cdots\\&-\frac{1}{2q}+\frac{1}{2p+1}+\cdots-\frac{1}{2(n-1)q}+\frac{1}{2(n-1)p+1}+\cdots\\&+\frac{1}{2np-1}\end{aligned}$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{2np}{2(n-1)q} + \alpha_n$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q} + \alpha'_n,$$

其中　$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty}\alpha'_n = 0,$

又　$S_{2n+1} = S_{2n} + \beta_n, \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n \to 0,$

故　$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1} = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$

命题得证.

【2705】 证明:若调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots.$$

各项的次序不重新排列而是改变符号,使得 p 个正项后面紧跟着 q 个负项($p \neq q$),则此级数仍然是发散的. 只是在 $p = q$ 时是收敛的.

证　若 $p \neq q$,不妨设 $p > q$,令

$$a_k = \frac{1}{(p+q)k+1} + \cdots + \frac{1}{(p+q)k+p} - \frac{1}{(p+q)k+p+1} - \cdots - \frac{1}{(p+q)k+p+q},$$

易知　$a_k > \frac{1}{(p+q)k+1} > 0(k = 1,2,\cdots),$

但 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(p+q)k+1}$ 发散,于是 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k$ 发散,故按题中规则得来的级数发散.

若 $p = q$,令

$$b_k = \frac{1}{kp+1} + \frac{1}{kp+2} + \cdots + \frac{1}{kp+p}, k = 0,1,\cdots.$$

显然 $b_k > b_{k+1} > 0$,且

$$\lim_{k\to\infty} b_k = 0,$$

于是由莱布尼兹判别法有$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k b_k$收敛,即所得级数,当$p=q$时收敛.

§3. 级数的运算

级数的和与乘积 定义:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty}b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n \sum_{n=1}^{\infty}b_n = \sum_{n=1}^{\infty}c_n$.

其中$c_n = a_1 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$.

若两个级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$是收敛的,则等式(1)具有非形式的意义,而等式(2)在两个级数收敛且至少有一个是绝对收敛时也具有非形式意义.

【2706】 若两个级数中:(1)一个级数收敛,而另一个发散;(2)两个级数都是发散的.问两个级数的和是什么?

解 (1)一定发散,设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$发散,

设$c_n = a_n + b_n$,则$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$发散

反证法,若$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$收敛,于是$b_n = c_n - a_n$有$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛,矛盾.

(2)可能收敛,也可能发散.

i) 设$a_n = (-2)^n, b_n = (-2)^{n+1}$,

则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$及$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$均发散,但

$$c_n = a_n + b_n = 0.$$

于是$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$收敛.

ii) 设 $a_n = b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$,

则 $$c_a = a_n + b_n = \frac{2}{\sqrt{n}},$$

显然 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 皆发散.

【2707】 求两个级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^n}+\frac{(-1)^n}{n^3}\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right]$$

解 由 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{(-1)^n}{n^3}\right)$ 和 $\sum_{n=1}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right)$ 皆收敛有

$$原级数=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^n}+\frac{(-1)^n}{n^3}+\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)=\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}.$$

求下列级数的和(2708 ~ 2710).

【2708】 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right]$.

解 $$原级数=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4}.$$

【2709】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$.

解 易知该级数绝对收敛,现将 $n=0,1,2,\cdots$ 分为三类:

$A_1=\{n \mid n=3k, k=0,1,2\cdots\}$,

$$A_2=\{n\mid n=3k+1,k=0,1,2\cdots\},$$
$$A_3=\{n\mid n=3k+2,k=0,1,2\cdots\},$$

则
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$$
$$=\sum_{n\in A_1}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}+\sum_{n\in A_2}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}+\sum_{n\in A_3}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3k}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2\pi}{3}}{2^{3k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)}{2^{3k+2}}$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{4}\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^3}\right)^k$$
$$=\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{8}}=\frac{5}{7}.$$

于是我们有

$$\text{原级数的和}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}-1=\frac{5}{7}-1=-\frac{2}{7}.$$

【2710】 $\sum_{n=0}^{\infty}x^{\left[\frac{n}{2}\right]}y^{\left[\frac{(n+1)}{2}\right]}\quad(|xy|<1).$

解 将 $n=0,1,2,\cdots$ 分为二类

$$A_1=\{n\mid n=2k,k=0,1,2,\},$$
$$A_2=\{n\mid n=2k+1,k=0,1,2,\},$$

于是
$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{\left[\frac{n}{2}\right]}y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$$
$$=\sum_{n\in A_1}x^{\left[\frac{n}{2}\right]}y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}+\sum_{n\in A_2}x^{\left[\frac{n}{2}\right]}y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}x^ky^k+\sum_{k=0}^{\infty}x^ky^{k+1},$$

因为 $|xy|<1$,故原级数收敛,且其和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{\left[\frac{n}{2}\right]} y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} = \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k + y\sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k$$
$$= (1+y)\sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k = \frac{1+y}{1-xy}.$$

【2711】 证明：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1.$$

证法一：令

$$a_n = \frac{1}{n!}, b_n = \frac{(-1)^n}{n!},$$

由 $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 皆绝对收敛. 于是

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

其中 $$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{1}{i!} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{(n-i)!}\right]$$
$$= \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{n!}{i!(n-i)!}$$
$$= \frac{1}{n!}(1-1)^n = 0, (n = 1,2,\cdots),$$

于是 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1.$$

证法二：由 $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 知

$$\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}, \mathrm{e}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!},$$

故 $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-1}=1.$$

【2712】 证明：

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n \qquad (|q|<1).$$

证 由 $|q|<1$ 知 $\sum_{n=0}^{\infty}q^n$ 绝对收敛，于是

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}c_n,$$

其中 $$c_n=\sum_{i=0}^{n}q^i\cdot q^{n-i}=q^n(n+1) \qquad (n=0,1,2,\cdots),$$

故 $$\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n.$$

【2713】 证明：收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ 的平方是发散级数.

证 反证法. 设 $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^2$ 收敛，其积记为 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$，即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}c_n,$$

其中 $$c_n=\frac{1}{1}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{(-1)^n}{\sqrt{n-1}}+\cdots$$
$$+\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\cdot\frac{(-1)^{n-k+2}}{\sqrt{n-k+1}}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{1}$$
$$=(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{1\cdot\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n-1}}+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{n-k+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}\cdot 1}\right),$$

又 $$n^2-k(n-k+1)=n^2-nk+k^2-k$$
$$=\left(n-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{3k^2-4k}{4}>0 \qquad (k\geqslant 2),$$

又当 $k=1$ 时

$$1\cdot(n-1+1)=n\leqslant n^2,$$

因此　$$\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}}\geqslant\frac{1}{n},k=1,2,\cdots,$$

于是有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 发散,矛盾.因此,级数$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^2$ 发散.

【2714】 证明:两个收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}\qquad 及 \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}}\qquad(\beta>0).$$

的乘积在 $\alpha+\beta>1$ 时是收敛级数,而在 $\alpha+\beta<1$ 时是发散级数.

证　设

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n,(\alpha>0,\beta>0)$$

由乘积定义

$$c_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{i-1}}{i^{\alpha}}\cdot\frac{(-1)^{n-i}}{(n-i+1)^{\beta}}\right)$$

$$=(-1)^{n-1}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i+j=n+1}}\frac{1}{i^{\alpha}j^{\beta}}=(-1)^{n-1}\mathrm{d}_n,$$

其中　$$\mathrm{d}_n=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{i^{\alpha}(n-i+1)^{\beta}}\qquad(n=1,2,\cdots),$$

i) 当 $\alpha+\beta<1$ 时,由

$$\mathrm{d}_n\geqslant\sum_{1\leqslant i\leqslant\frac{n}{2}}\frac{1}{i^{\alpha}(n-i+1)^{\beta}}\geqslant\frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\alpha}}\sum_{1\leqslant i\leqslant\frac{n}{2}}\frac{1}{(n-i+1)^{\beta}}$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\alpha}}\sum_{\frac{n}{2}\leqslant j\leqslant n}\frac{1}{j^{\beta}}\geqslant\frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\alpha}}\int_{\frac{n}{2}}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\beta}}$$

$$=2^{\alpha}\cdot\frac{1}{1-\beta}\left(1-\frac{1}{2^{1-\beta}}\right)n^{1-(\alpha+\beta)},$$

有 $\mathrm{d}_n\to+\infty$(当 $n\to\infty$ 时),因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 为发散级数.

ii) 当 $\alpha+\beta>1$ 时,有

$$d_n=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{i^\alpha(n-i+1)^\beta}$$

$$=\sum_{1\leqslant i\leqslant \frac{n}{2}}\frac{1}{i^\alpha(n-i+1)^\beta}+\sum_{\frac{n}{2}\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{i^\alpha(n-i+1)^\beta}.$$

而 $$\sum_{1\leqslant i\leqslant \frac{n}{2}}\frac{1}{i^\alpha(n-i+1)^\beta}\leqslant\frac{1}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^\beta}\sum_{1\leqslant i\leqslant \frac{n}{2}}\frac{1}{i^\alpha}$$

$$\leqslant\frac{1}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^\beta}\left(1+\int_1^{\frac{n}{2}}\frac{dx}{x^\alpha}\right)$$

$$=O(n^{-\beta})+O\left(n^{-\beta}\int_1^{\frac{n}{2}}\frac{dx}{x^\alpha}\right)=O(n^{-\beta})+O(n^{1-(\alpha+\beta)}),$$

类似地 $$\sum_{\frac{n}{2}<i\leqslant n}\frac{1}{i^\alpha(n-i+l)^\beta}\leqslant O(n^{-\alpha})+O(n^{1-(\alpha+\beta)}),$$

由 $\alpha>0,\beta>0,1-(\alpha+\beta)<0$,

有 $$d_n\leqslant O(n^{-\alpha})+O(n^{-\beta})+O(n^{1-(\alpha+\beta)})\to 0(\text{当 } n\to\infty),$$

记 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta},\sum_{n=1}^{\infty}c_n,$$

的部分和分别为 A_n,B_n,S_n. 于是

$$A_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{i^\alpha},B_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{i^\beta},$$

$$C_n=\sum_{i=1}^{n}c_i=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ i+j=k+1}}\frac{1}{i^\alpha j^\beta},$$

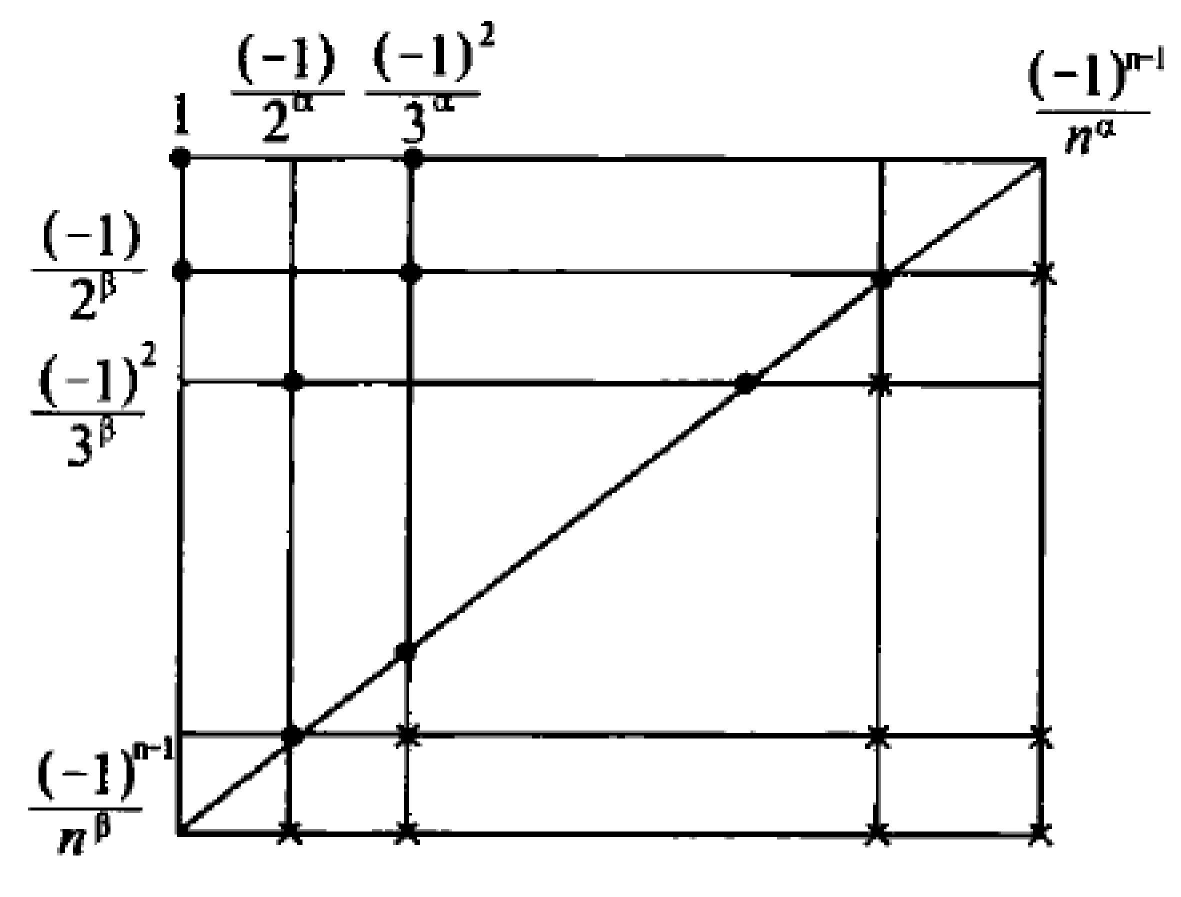
令 $\Lambda_n=A_nB_n-S_n$,

则 $$\Lambda_n=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{i^\alpha}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{j^\beta}\right)-S_n$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i}}{i^\alpha}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i}}{j^\beta}\right)$$

$$-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ i+j=k+1}}\frac{1}{i^\alpha j^\beta}.$$

为估计上述各项，列乘法表如下



A_nB_n 表示上表正方形各交点上乘积的全部和.

S_n 是乘法表对角线右上角各交点上乘积项的总和，于是 $\Lambda_n = A_nB_n - S_n$ 是乘法表对角线的右下部分各交点处乘积项(打 × 号处的乘积项) 的总和，从而有

$$\begin{aligned}\Lambda_n &= \frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta}\left[\frac{(-1)}{2^\alpha}+\frac{(-1)^2}{3^\alpha}+\cdots+\frac{(-1)^{(n-1)}}{n^\alpha}\right] \\ &\quad +\frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)^\beta}\left[\frac{(-1)^2}{3^\alpha}+\frac{(-1)^3}{4^\alpha}+\cdots+\frac{(-1)^{(n-1)}}{n^\alpha}\right] \\ &\quad +\cdots+\frac{(-1)}{2^\beta}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\right] \\ &= (-1)^n\left[\frac{1}{n^\beta}\left(\frac{1}{2^\alpha}-\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right. \\ &\quad +\frac{1}{(n-1)^\beta}\left(\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{4^\alpha}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\right) \\ &\quad \left.+\cdots+\frac{1}{2^\beta}\left(\frac{1}{n}a\right)\right],\end{aligned}$$

进一步
$$\begin{aligned}|\Lambda_n| &= \frac{1}{n^\beta}\left(\frac{1}{2^\alpha}-\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n^\beta}\right) \\ &\quad +\frac{1}{(n-1)^\beta}\left(\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{4^\alpha}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\right) \\ &\quad +\cdots+\frac{1}{2^\beta}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{n^\beta}\cdot\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{(n-1)^\beta}\cdot\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{2^\beta}\cdot\frac{1}{n^\alpha}$$

$$\leqslant \sum_{\substack{i+j=n+2\\2\leqslant i,j\leqslant n}}\frac{1}{j^\beta i^\alpha}\leqslant \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n+1\\i+j=n+2}}\frac{1}{i^\alpha j^\beta}=\mathrm{d}_{n+1}.$$

由 $\mathrm{d}_n\to 0(n\to\infty)$ 有 $\Lambda_n\to 0$,故

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(A_nB_n-\Lambda_n)=\lim_{n\to\infty}A_n\lim_{n\to\infty}B_n,$$

故收敛.

综上所述,当 $\alpha+\beta>1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}(\alpha>0)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta}(\beta>0)$, $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 皆为收敛.

【2715】 验证两个发散级数

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n \quad 及 \quad 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right),$$

的乘积是绝对收敛级数.

证 令

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=\sum_{m=1}^{\infty}u_m,$$

其中 $u_1=1,u_2=-\frac{3}{2},u_3=-\left(\frac{3}{2}\right)^2,\cdots,$

$$u_m=-\left(\frac{3}{2}\right)^{m-1}(m=2,3,\cdots),$$

又令 $1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}v_m,$

其中 $v_1=1,v_2=2+\frac{1}{2^2},v_3=\frac{3}{2}\left(2^2+\frac{1}{2^3}\right),\cdots$

$$v_m=\left(\frac{3}{2}\right)^{m-2}\cdot\left(2^{m-1}+\frac{1}{2^m}\right)\qquad(m=2,3,\cdots),$$

于是 $c_1=u_1v_1=1$,按乘积定义

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\cdot\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n,$$

其中
$$c_n = u_1v_n + u_2v_{n-1} + \cdots + u_{n-1}v_2 + u_nv_1$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^n}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-3}\cdot\left(2^{n-2}+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$
$$+\cdots+\left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\right]\cdot\left(2+\frac{1}{2^2}\right)+\left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right]$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left[(2^{n-1}-2^{n-2}-2^{n-3}-\cdots-2-1)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}-\cdots-\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left[\left(2^{n-1}-\frac{2^{n-1}-1}{2-1}\right)+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}\right)\right]$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\cdot\frac{3}{2^n}$$
$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$

所以 $$\sum_{n=1}^{\infty}c_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$

绝对收敛.

§4. 函数项级数

1. **收敛域** 使函数级数
$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \qquad ①$$
收敛的那些数值 x 的总体 X 被称为这个级数的收敛域，而函数 $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}u_i(x)\ (x\in X)$ 称为级数的和.

2. **一致收敛**

对于函数序列 $f_1(x),f_2(x),\cdots$，若

(1) 存在极限函数
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x) \qquad (x\in X);$$

(2) 对于任何数$\varepsilon>0$,存在$N=N(\varepsilon)$,使得当$n>N$和$x\in X$时,$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$成立,则称该函数序列在$X$集上一致收敛.在这种情况下写成:$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$.

若函数级数 ① 部分和序列

$$S_n(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x)\qquad(n=1,2,\cdots),$$

在X集上能一致收敛,则函数级数 ① 在这个集上被称为一致收敛.

3. **柯西准则** 对于级数①在X集上的一致收敛的充分必要条件是对于每一个$\varepsilon>0$存在数$N=N(\varepsilon)$,使得当$n>N$及$p>0$时,对于所有的$x\in X$,以下不等式成立:

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}u_i(x)\right|<\varepsilon.$$

4. **维尔斯特拉斯判别法** 若存在收敛的数项级数

$$c_1+c_2+\cdots+c_n+\cdots, \qquad ②$$

使得当$x\in X$时,

$$|u_n(x)|\leqslant c_n\qquad(n=1,2,\cdots).$$

则级数 ① 在X集上绝对一致收敛.

5. **阿贝尔判别法** 若

(1) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在$X$集上一致收敛;

(2) 函数$b_n(x)(n=1,2,\cdots)$全体是有界的且对每一个x形成单调序列,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)bn(x), \qquad ③$$

在X集上一致收敛.

6. **狄利克雷判别法** 若

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$的部分和全体有界;

（2）序列 $b_n(x)(n=1,2\cdots)$ 对每一个 x 都是单调的，且当 $n\to\infty$ 时在 X 上一致地趋于零，

则级数③在 X 集上一致收敛.

7. 函数项级数的性质

（1）以连续函数为项的一致收敛级数的和是连续函数.

（2）若函数项级数 ① 在每一个 $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ 中一致收敛且存在有穷极限：

$$\lim_{x\to a}u_n(x)=A_n \qquad (n=1,2,\cdots),$$

则 ① 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 收敛；

② 以下等式成立：

$$\lim_{x\to a}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\{\lim_{x\to a}u_n(x)\}.$$

（3）当 $a<x<b$ 时，若收敛级数 ① 各项均可微分，以及导函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 (a,b) 一致收敛，则：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right]=\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x) \qquad 当\ x\in(a,b)\ 时.$$

（4）若级数 ① 各项是连续的，且这个级数在有限区间 $[a,b]$ 一致收敛，则

$$\int_a^b\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x, \qquad ④$$

当 $n\to\infty$ 时，若 $\int_a^b R_n(x)\mathrm{d}x\to 0.$

其中 $R_n(x)=\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}u_i(x).$

则一般来说公式 ④ 为真. 对于积分限为无穷情况，这个最后的条件也是适用的.

确定以下函数项级数的(绝对和条件的) 收敛域(2716 ～ 2736).

【2716】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$;

解 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{x^{n+1}}}{\frac{n}{x^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{x}\right|=\left|\frac{1}{x}\right|,$$

于是当$\left|\frac{1}{x}\right|<1$,即$|x|>1$时,原级数绝对收敛.

【2717】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$;

解 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n+1}}{\frac{(-1)^n}{2n-1}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\left|\frac{1-x}{1+x}\right|=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|,$$

有当$\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$,即$(1-x)^2<(1+x)^2$或$x>0$时,级数绝对收敛,当$x=0$时,原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$条件收敛,当$x<0$时,发散.

【2718】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$;

解 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^{n+1}}{\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\cdot\frac{x}{2x+1}\right|=\left|\frac{x}{2x+1}\right|,$$

有当$\left|\frac{x}{2x+1}\right|<1$,即$x>-\frac{1}{3}$或$x<-1$时,原级数绝对收敛,当

$x=-\frac{1}{3}$ 或 $x=-1$ 时,原级数通项不趋于零,故发散.

【2719】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$;

解 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^{n+1}}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+2}\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|=\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|,$$

有当 $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|<1$,即 $(x^2-1)^2>0$,级数绝对收敛. 即 $|x|\neq 1$ 时,级数绝对收敛.

当 $x=-1$ 时,原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 条件收敛.

当 $x=1$ 时,原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 发散.

【2720】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{2n}}{2^n}x^n(1-x)^n$;

解 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)3^{2(n+1)}}{2^{n+1}}x^{n+1}(1-x)^{n+1}}{\frac{n\cdot 3^{2n}}{2^n}x^n(1-x)^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^2(n+1)}{2n}x(1-x)\right|$$

$$=\frac{9}{2}\,|x(1-x)|,$$

有当 $\frac{9}{2}\,|x(1-x)|<1$, 即 $|x(1-x)|<\frac{2}{9}$ 时, 也就是 $-\frac{\sqrt{17}-3}{6}<x<\frac{1}{3},\frac{2}{3}<x<\frac{\sqrt{17}+3}{6}$ 时该级数绝对收敛,在

上述两区间端点处，级数显然发散.

【2721】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2}$;

解 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}\sin^{n+1}x}{(n+1)^2}}{\frac{2^n\sin^n x}{n^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n^2\sin x}{(n+1)^2}\right|=2\mid\sin x\mid,$$

有当 $2\mid\sin x\mid<1$，即 $\mid\sin x\mid<\frac{1}{2}$ 时，也就是 $\mid x-k\pi\mid<\frac{\pi}{6}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，该级数绝对收敛，当 $\mid x-k\pi\mid=\frac{\pi}{6}$ 时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，收敛. 综上所述，当 $\mid x-k\pi\mid\leqslant\frac{\pi}{6}$，$k\in IN$ 时，该级绝对收敛.

【2722】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^p}$;

解 当 $p>1$，x 不为负整数，则级数绝对收敛.

当 $0<p\leqslant1$，x 不为负整数，则级数条件收敛.

当 $p\leqslant0$，级数发散.

【2723】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p\sin nx}{1+n^q}\qquad(q>0;0<x<\pi)$;

解 由

$$\frac{\mid\sin nx\mid}{2n^{q-p}}\leqslant\left|\frac{n^p\sin nx}{1+n^q}\right|\leqslant\frac{1}{n^{q-p}},$$

知，当 $q>p+1$ 时，级数绝对收敛，当 $q\leqslant p+1$ 时，由题 2698 知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n^p\sin nx}{1+n^q}\right|$ 发散.

当 $p<q\leqslant p+1$ 时，对任意 $x\in(0,\pi)$，$\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx$ 有界，又

$$\frac{n^p}{1+n^q}\sim\frac{1}{n^{q-p}}\to0\qquad(n\to\infty),$$

于是级数收敛.

当 $q \leqslant p$ 时,级数显然发散,综上所述,当 $q > p+1$ 时,级数绝对收敛,当 $p < q \leqslant p+1$ 时,级数条件收敛.

【2724】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1-x^n}$(兰伯特级数);

解　当 $|x|<1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ 绝对收敛,又 $\left\{\dfrac{1}{1-x^{2n}}\right\}$ 单调递减且有下界,于是由阿贝尔判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1-x^{2n}}$ 收敛,又 $\{x^n\}$ 单调递减且有界,于是由阿贝尔判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{1-x^{2n}}$ 收敛. 而

$$\frac{x^n}{1-x^n} = \frac{x^n}{1-x^{2n}} + \frac{x^{2n}}{1-x^{2n}},$$

故原级数当 $|x|<1$ 时绝对收敛.

当 $|x|=1$ 时,级数无意义.

当 $|x|>1$ 时,用反证法,设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1-x^n}$ 收敛.

由　$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n},$$

收敛. 于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$ 也收敛(阿贝尔判别法). 从而有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} - \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} 1,$$

收敛,矛盾. 因此,$|x|>1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1-x^n}$ 发散.

【2725】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{x(x+n)}{n}\right]^n$;

解 当 $|x|<1$ 时由

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(x+n)}{n}\right|=|x|,$$

故级数绝对收敛.

当 $|x|=1$ 时

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\left|x^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right|\to e^{\pm1}\neq 0,$$

于是级数发散,当 $|x|>1$ 时,$a_n\to\infty$,级数发散.

【2726】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$;

解 $\left|\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}\right|\leqslant|x|^n$,

知当 $|x|<1$ 时,级数绝对收敛,当 $|x|=1$ 时,

$$|a_n|=\left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right|=\frac{1}{2},$$

有 $a_n\not\to 0$,原级数发散.

当 $|x|>1$ 时

$$\left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right|=\left|\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}\right|\leqslant\left|\frac{1}{x}\right|^n,$$

由 $|x|>1\Rightarrow\left|\dfrac{1}{x}\right|<1$ 知原级数绝对收敛.

【2727】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$;

解 当 $|x|<1$ 时,由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{n+1}}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{n+1})}}{\dfrac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{1+x^{n+1}}\right|=|x|<1,$$

知级数绝对收敛.

当 $x=1$ 时，级数通项为$\frac{1}{2^n}$，原级数收敛.

当 $x=-1$ 时，级数通项无意义.

当 $|x|>1$ 时，因为

$$\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$$
$$=\frac{x^{\frac{n(1-n)}{2}}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}$$
$$=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n(1-n)}{2}}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)},$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{(n+1)n}{2}}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^{n+1}}\right)}}{\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}}\right|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{1}{x}\right|^n}{\left|1+\frac{1}{x^{n+1}}\right|}=0\qquad\left(因\left|\frac{1}{x}\right|^n<1\right),$$

知当 $|x|>1$ 时，原级数绝对收敛.

【2728】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$；

解　由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{ne^{-nx}}=e^{-x},$$

知当 $e^{-x}<1$，即 $x>0$ 时，级数绝对收敛. 当 $x=0$ 时，级数通项为 n，原级数发散，当 $x<0$ 时，$e^{-x}>1$，原级数发散.

【2729】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{1}{1+a^{2n}x^2}$;

解 令 $a_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{1}{1+a^{2n}x^2}$,

当 $x=0$ 时

$$a_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}>\frac{1}{\sqrt[n]{n^n}}=\frac{1}{n},$$

知原级数发散.

当 $x\neq 0$,且 $|a|>1$ 时,由

$$0<a_n<\frac{1}{a^{2n}x^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{|a|}\right)^{2n},$$

知原级数绝对收敛.

当 $x\neq 0$,且 $|a|\leqslant 1$ 时,由

$$|a_n|\geqslant\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n^n}}=\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{n},$$

知原级数发散.

【2730】 $\sum_{n=1}^{\infty}(2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})(2-x^{\frac{1}{3}})\cdots(2-x^{\frac{1}{n}})$,

$(x>0)$;

解 令

$$a_n=(2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})(2-x^{\frac{1}{3}})\cdots(2-x^{\frac{1}{n}}),$$

1) 当 $x=2$ 时,$a_n=0(n=1,2,\cdots)$,原级数收敛

2) 当 $x\neq 2$ 时,又由题设 $x>0$,知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x}=1,$$

于是当 n 充分大后,a_n 不变号,由

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(x^{\frac{1}{n+1}}-1)}{2-x^{\frac{1}{n+1}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x^{\frac{1}{n+1}}-1}{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{2-x^{\frac{1}{n+1}}}\right]=\ln x,$$

知当 $x > \mathrm{e}$ 时，即 $\ln x > 1$，原级数绝对收敛，当 $x < \mathrm{e}$ 时，原级数发散，当 $x = \mathrm{e}$ 时，n 充分大后

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{1}{2-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1-(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1)}$$

$$= 1+(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1)+O((\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1)^2)$$

又 $$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1 = \frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

于是有 $$\frac{a_{n-1}}{a_n} = 1+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

从而由高斯判别法知原级数发散，综上所述，当 $x=2$ 及 $x>\mathrm{e}$ 时，原级数绝对收敛.

【2731】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$;

解 $\forall x \in \mathbb{R}$，当 n 足够大时，有 $n+x>0$，于是我们可把该级数看作正项级数，又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}}{\frac{1}{n^x}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x,$$

知当 $x>1$ 时，原级数绝对收敛，当 $x \leqslant 1$ 时，原级数发散.

【2732】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n y^n}{x^n+y^n}$ $\quad (x>0;y>0)$;

解 当 $0<x<1$ 时，由

$$\frac{x^n y^n}{x^n+y^n} = \frac{x^n}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^n} < x^n,$$

知原级数绝对收敛.

当 $0<y<1$ 时，同理，原级数绝对收敛.

【2733】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+y^n}$ $\quad (y \geqslant 0)$;

解 令 $a_n = \dfrac{x^n}{n+y^n}$, $y \geqslant 0$,

(1) 当 $|x|<1$ 时,由

$$|a_n| = \frac{|x|^n}{n+y^n} \leqslant |x|^n,$$

知原级数绝对收敛.

(2) 当 $x=1$ 时,

① 当 $y>1$,由

$$|a_n| = \frac{1}{n+y^n} < \left(\frac{1}{y}\right)^n,$$

知原级数绝对收敛.

② 当 $0 \leqslant y \leqslant 1$,由

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+y^n} = 1,$$

知原级数发散.

(3) 当 $x=-1$ 时,

① 当 $y>1$,由

$$|a_n| = \frac{1}{n+y^n} < \left(\frac{1}{y}\right)^n,$$

知原级数绝对收敛.

② 当 $0 \leqslant y \leqslant 1$,由

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+y^n} \quad (n=1,2,\cdots),$$

知原级数条件收敛.

(4) 当 $|x|>1$ 时,

① 当 $y=0$,由 $a_n = \dfrac{x^n}{n}$ 知原级数发散.

② 当 $y>0$,若 $\left|\dfrac{x}{y}\right|<1$,即 $|x|<y$ 时,由

$$|a_n| = \frac{|x|^n}{n+y^n} < \left|\frac{x}{y}\right|^n,$$

知原级数绝对收敛，若

$$\left|\frac{x}{y}\right|\geqslant 1,$$

且 $0<y\leqslant 1$ 时，由

$$|a_n|=\frac{|x|^n}{n+y^n}>\frac{|x|^n}{n+1}\to\infty,$$

知原级数发散.

若 $\left|\frac{x}{y}\right|\geqslant 1$ 且 $y>1$ 时，由

$$|a_n|=\frac{|x^n|}{n+y^n}=\left|\frac{x}{y}\right|^n\cdot\frac{1}{1+\frac{n}{y^n}}\to\infty,$$

知原级数发散，由此知当 $\left|\frac{x}{y}\right|\geqslant 1$ 且 $y>0$ 时，原级数发散.

综上所述，我们有当 $|x|<1,0\leqslant y<+\infty$，当 $|x|=1,y>1$，当 $|x|>1,|x|<y$ 时，原级数绝对收敛. 当 $x=-1,0\leqslant y\leqslant 1$ 时，原级数条件收敛.

【2734】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{|x|^{n^2}+|y|^{n^2}}$；

解 令 $a_n=\sqrt[n]{|x|^{n^2}+|y|^{n^2}}$，

设 $x\cdot y\neq 0$，由

$$\sqrt[n]{|x|^{n^2}+|y|^{n^2}}$$

$$=\sqrt[n]{\left(\frac{|x|}{\max(|x|,|y|)}\right)^{n^2}+\left(\frac{|y|}{\max(|x|,|y|)}\right)^{n^2}}\cdot[\max(|x|,|y|)]^n,$$

有 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\max(|x|,|y|).$$

于是当 $\max(|x|,|y|)<1$ 时，级数绝对收敛，当 $\max(|x|,|y|)>1$ 时，级数发散. 当 $\max(|x|,|y|)=1$ 时，$a_n\to 1(n\to\infty$ 时)，故级数发散.

【2735】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+x^n)}{n^y}\qquad(x\geqslant 0)$;

解 (1) 当 $0\leqslant x<1$ 时,由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\ln(1+x^n)}{n^y}}{\dfrac{x^n}{n^y}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x^n)}{x^n}=1,$$

知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+x^n)}{n^y}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^y}$ 有相同的敛散性.

又 $\frac{x^n}{n^y}\leqslant n^{|y|}x^n$,而 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{|y|}x^n}=x<1$ 知,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^y}$ 绝对收敛,进而原级数绝对收敛.

(2) 当 $x=1$ 时,原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 2}{n^y}$,于是当 $y>1$ 时收敛,当 $y\leqslant 1$ 时发散.

(3) 当 $x>1$ 时,原级数的通项为

$$\frac{\ln(1+x^n)}{n^y}=\frac{\ln x^n\left(1+\dfrac{1}{x^n}\right)}{n^y}=\frac{\ln x}{n^{y-1}}+\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x^n}\right)}{n^y},$$

由(1)知,当 $x>1$ 时,$\forall y\in\mathbb{R}$,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{n^y}$ 绝对收敛,而对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln x}{n^{y-1}}$,当 $y>2$ 时,收敛,当 $y\leqslant 2$ 时发散,于是当 $x>1$,$y>2$ 时,原级数绝对收敛,综上所述原级数的绝对收敛域为

$\{(x,y)\mid 0\leqslant x<1,-\infty<y<+\infty\}$,

$\{(x,y)\mid x=1,y>1\}$

和 $\{(x,y)\mid x>1,y>2\}$.

【2736】 $\sum_{n=1}^{\infty}\tan^n\left(x+\frac{y}{n}\right)$;

解 由

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\tan^n\left(x+\frac{y}{n}\right)\right|}=|\tan x|.$$

知当 $|x-k\pi|<\frac{\pi}{4}(k\in\mathbb{Z})$ 时，$|\tan x|<1$ 有原级数绝对收敛，当 $|x-k\pi|\geqslant\frac{\pi}{4}$ 时，由 $\tan^n\left(x+\frac{y}{n}\right)\to\infty$，原级数发散.

【2737】 证明：若在 $x=x_1$ 和在 $x=x_2(|x_1|<|x_2|)$ 时，罗朗级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_nx^n$ 收敛，则这个级数在 $|x_1|<|x|<|x_2|$ 时也收敛.

证 由题意有 $\sum\limits_{n=-\infty}^{n=+\infty}a_nx_1{}^n$ 和 $\sum\limits_{n=-\infty}^{n=+\infty}a_nx_2{}^n$ 皆收敛，于是 (1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_1{}^n$，(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{-n}x_1{}^{-n}$，(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_2{}^n$，(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{-n}x_2{}^{-n}$ 皆收敛.

由(3)知当 $|x|<|x_2|$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛，由(2)知，当 $\left|\frac{1}{x}\right|<\left|\frac{1}{x_1}\right|$，即 $|x_1|<|x|$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{-n}x^{-n}$ 收敛，于是，当 $|x_1|<|x|<|x_2|$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{-n}x^{-n}$ 皆收敛，即 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_nx^n$ 收敛.

【2738】 确定罗朗级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{n}{2^{|n|}}x^n$ 的收敛域并求出它的和.

解 把 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{n}{2^{|n|}}x^n$ 分为两部分

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n$，　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-n}{2^n}x^{-n}$.

于是对于级数(1)，由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}x^{n+1}}{\frac{n}{2^n}x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2n}\cdot x\right|=\frac{|x|}{2},$$

知,当 $|x|<2$ 时,级数(1) 收敛,对级数(2) 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-\frac{n+1}{2^{n+1}}x^{-n-1}}{\frac{-n}{2^n}x^{-n}}\right|=\lim_{n\to}\left|\frac{n+1}{2nx}\right|=\frac{1}{2|x|},$$

知,当 $|x|>\frac{1}{2}$ 时,级数(2) 收敛.

因此,当$\frac{1}{2}<|x|<2$ 时原级数收敛. 记级数(1) 的和为 $S_{(1)}(x)$,级数(2) 的和为 $S_{(2)}(x)$.

故 $$S_{(2)}(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{-n}=-S_{(1)}\left(\frac{1}{x}\right),$$

当$\frac{1}{2}<|x|<2$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2^n}x^n$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n$ 皆收敛,且

$$\begin{aligned}S_{(1)}(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2^n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n\\&=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{l}{2^{l+1}}x^{l+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\\&=\frac{x}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{2^l}x^l+\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\\&=\frac{x}{2}S_{(1)}(x)+\frac{x}{2-x},\end{aligned}$$

于是有 $$S_{(1)}(x)=\frac{\frac{x}{2-x}}{1-\frac{x}{2}}=\frac{2x}{(2-x)^2},$$

$$S_{(2)}(x)=-\frac{2\cdot\frac{1}{x}}{\left(2-\frac{1}{x}\right)^2}=-\frac{2x}{(2x-1)^2},$$

因此,当$\frac{1}{2}<|x|<2$ 时,有原级数的和为

$$S_{(1)}(x)+S_{(2)}(x)=\frac{6x(x^2-1)}{(2-x)^2(2x-1)^2}.$$

【2739】 确定牛顿级数的(绝对的与条件的)收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{[n]}}{n!}$;(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\frac{x^{[n]}}{n!}$;(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(ex)^n y^{[n]}}{n^n}$.

其中 $x^{[n]}=x(x-1)\cdots[x-(n-1)]$

解 (1) 由题 2700 知,当 $x\geqslant 0$ 时,级数绝对收敛,当 $-1<x<0$ 时,级数条件收敛.

(2) 因为

$$\begin{aligned}x^{[n]}&=x(x-1)\cdots[x-(n-1)]\\&=(-1)^{n-1}(n-1-x)(n-2-x)\cdots(2-x)(1-x)x\\&\xlongequal{t=-(1+x)}-(-1)^{n-1}(n+t)(n-1+t)\cdots\\&\qquad(3+t)(2+t)(1+t),\end{aligned}$$

于是原级数可写为

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(1+t)(2+t)\cdots(n+t)}{n!n^p}.$$

由题2699知,当 $p>t+1$ 时,即 $p>-x$ 时,原级数绝对收敛,当 $x\in IN$ 时,原级绝对收敛,当 $-(1+x)<p\leqslant -x$ 时,原级数条件收敛.

(3) 令 $t=-(1+y)$,于是有

$$y^{[n]}=(-1)^n(1+t)(2+t)\cdots(n+t),$$

令 $$a_n=\frac{(ex)^n y^{[n]}}{n^n},$$

当 $x\in IR,y\in IN$ 时,

$$a_n=0\qquad(n=1,2,\cdots),$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,当 $y\notin IN$ 时,有

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}}&=-\frac{n+1}{n+1+t}\cdot\frac{1}{ex}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\&=-\frac{n+1}{n-y}\cdot\frac{1}{ex}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\end{aligned}$$

于是当 $|x|<1$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{1}{|x|}>1,$$

从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,当 $|x|>1$,由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{1}{|x|}<1,$$

有当 n 充分大时有 $|a_n|<|a_{n+1}|$,从而 a_n 不趋于零,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,当 $|x|=1$ 时,有

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|&=\frac{n+1}{n-y}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\&=\left[1+\frac{1+y}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\cdot\left[1-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\&=1+\frac{1+\left(y-\frac{1}{2}\right)}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

从而当 $y>\frac{1}{2}$ 时,由高斯判别法知,$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛;当 $y\leqslant\frac{1}{2}$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散,又 $|y|<\frac{1}{2}$ 时,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=-\frac{1}{x}\left[1+\frac{\mu}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right],(0<\mu<1)$$

于是据高斯判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,当 $x=-1$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为交错级数,且

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1+\frac{\mu}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)>1\quad(n\text{ 充分大时}),$$

于是 $|a_n|$ 单调下降,而

$$|a_n|=|y|(1-y)(2-y)\cdots(n-1-y)\frac{\mathrm{e}}{n^n}$$

$$= e|y| \cdot \frac{1-y}{n} \cdot \frac{2-y}{n} \cdots \frac{n-1-y}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$< \frac{e|y|}{n} \to 0, (n \to \infty)$$

故由莱布尼兹判别法知当 $x=1$，$|y|<\frac{1}{2}$ 时，级数条件收敛.

综上所述，该级数的绝对收敛域为

$$\{(x,y) \mid |x|<1, y \in IR\},$$

$$\{(x,y) \mid |x|=1, y>\frac{1}{2}\},$$

$$\{(x,y) \mid -\infty<x<\infty, y \in IN\}.$$

该级数条件收敛域为

$$\{(x,y) \mid x=1, |y|<\frac{1}{2}\}.$$

【2740】 证明：若狄利克雷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 在 $x=x_0$ 时收敛，则这个级数在 $x>x_0$ 时也收敛.

证 由

$$\frac{a_n}{n^x} = \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}},$$

知当 $x>x_0$ 时 $\left(\frac{1}{n^{x-x_0}}\right)$ 关于 n 单调递减且趋于零，又 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ 收敛，于是由阿贝尔判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}}$ 收敛. 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 在 $x>x_0$ 时也收敛.

【2741】 证明：序列

$$f_n(x) \qquad (n=1,2,\cdots).$$

在 X 集上的一致收敛于极限函数 $f(x)$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\{\sup_{x\in X} \gamma_n(x)\} = 0,$$

其中 $\gamma_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$.

证 充分性. 由 $\lim_{n\to\infty}\{\sup_{x\in X}\gamma_n(x)\}=0$ 知，任意 $\varepsilon>0$，存在 $N(\varepsilon)$

>0,当 $n>N(\varepsilon)$ 时,有

$$\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

于是,任意 $x\in X$,只要 $n>N(\varepsilon)$ 时,有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

故 $\{f_n(x)\}$ 在 X 上一致收敛于 $f(x)$.

必要性:由 $f_n(x)$ 在 X 上一致收敛到 $f(x)$ 知,任意 $\varepsilon>0$,存在 $N(\varepsilon)>0$,当 $n>N(\varepsilon)$ 时,任 $x\in X$,均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

因此,当 $n>N(\varepsilon)$ 时,有 $\sup\limits_{x\in X}\{\gamma_n(x)\}\leqslant\varepsilon$,进一步,

$$\lim_{n\to\infty}\{\sup_{x\in X}\gamma_n(x)\}=0$$

【2742】 序列 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$

(1) 在区间 $(x_0,+\infty)$ 收敛;

(2) 在每一个有穷区间 $(a,b)\subset(x_0,+\infty)$ 一致收敛;

(3) 在区间 $(x_0,+\infty)$ 一致收敛.

分别意味着什么?

解 (1) 对于任意的 $\varepsilon>0$,任 $x\in(x_0,+\infty)$,总存在一个正数 $N=N(\varepsilon,x)$(N 与 ε,x 有关),当 $n>N$ 时,总有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

则称 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $(x_0,+\infty)$ 上收敛于 $f(x)$.

(2) 对每一个 $(a,b)\subset(x_0,+\infty)$,如果对于任给的 $\varepsilon>0$,存在 $N=N(\varepsilon,a,b)$(N 与 ε,a,b 有关),当 $n>N$ 时,任 $x\in(a,b)$,皆有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

则称 $\{f_{(n)}x\}$ 在 (a,b) 上一致收敛.

(3) 任 $\varepsilon>0$,存在 $N=N(\varepsilon)>0$(N 只与 ε 有关),当 $n>N$ 时,任 $x\in(x_0,+\infty)$ 皆有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

则称 $f_n(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上一致收敛.

【2743】 对于序列

$$f_n(x)=x^n(n=1,2,\cdots)\qquad(0<x<1).$$

确定其项的最小号码 $N = N(\varepsilon, x)$，使得从该项起，序列各项在点 x 与极限函数的偏差不超过 0.001，若

$$x = \frac{1}{10}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt[m]{10}}, \cdots.$$

问这个序列在(0,1) 区间能一致收敛吗?

解 由 $0 < x < 1$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$，于是由

$$| x^n - 0 | < \varepsilon \quad \varepsilon = 0.001,$$

有
$$n > \frac{\lg\varepsilon}{\lg x},$$

所以最小号码为

$$N = \left[\frac{\lg\varepsilon}{\lg x}\right] = \left[-\frac{3}{\lg x}\right],$$

当 $x = \frac{1}{10}$ 时，$N = 3$，

当 $x = \frac{1}{\sqrt{10}}$ 时，$N = 6$，

……

当 $x = \frac{1}{\sqrt[m]{10}}$ 时，$N = 3m$.

由上述计算知，当 $x = \frac{1}{\sqrt[m]{10}} \to 1(m \to \infty$ 时) 有

$$\frac{\lg\varepsilon}{\lg x} \to +\infty \qquad (0 < \varepsilon < 1, x \to 1^-),$$

于是，不能找到一个公共的 N(仅与 ε 有关)，使当 $n > N$ 时，对任 $x \in (0,1)$，皆有 $x^n < \varepsilon$，从而

$$f_n(x) = x^n, (n = 1, 2, \cdots) \qquad (0 < x < 1),$$

在区间(0,1) 内不一致收敛.

【2744】 应该取级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ 的多少项才能使部分和 $S_n(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 时与级数和之差小于 ε?设:

(1) $\varepsilon = 0.1$;(2) $\varepsilon = 0.01$;(3) $\varepsilon = 0.001$，求出 n 的数值

解 由

$$\left|\frac{\sin nx}{n(n+1)}\right|\leqslant\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2},$$

知原级数绝对收敛,令其和为

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n(n+1)},$$

部分和为 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k(k+1)}$,

它们之间的误差为

$$\Lambda_n(x)=|S(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k(k+1)}\right|.$$

下面对 $\Lambda_n(x)$ 作估计.

$$\begin{aligned}\text{由 }\Lambda_n(x)&=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k(k+1)}\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{\sin kx}{k(k+1)}\right|\\&=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{|\sin kx|}{k(k+1)}\leqslant\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k(k+1)}\\&=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{N+1}\right)=\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

即 $$\Lambda_n(x)<\frac{1}{n+1},$$

于是令$\frac{1}{n+1}<\varepsilon$时,也就是$n>\frac{1}{\varepsilon}-1$时,有 $\Lambda_n(x)<\varepsilon$,从而令 $N_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,若记$\left\{\frac{1}{\varepsilon}\right\}$为$\frac{1}{\varepsilon}$ 的小数部分,则有

$$\frac{1}{\varepsilon}=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+\left\{\frac{1}{\varepsilon}\right\},$$

于是当 $n>\frac{1}{\varepsilon}-1=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]-\left(\left\{1-\frac{1}{\varepsilon}\right\}\right)$时,

即 $n>N_0$ 时,有 $\Lambda_n(x)<\varepsilon$,从而该题相应的 n 如下:

ε	0.1	0.01	0.001
N_0	10	100	1000

【2745】 怎样的 n 值能保证以下不等式成立?

$$\left|e^x-\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{n!}\right|<0.001 \qquad (0\leqslant x\leqslant 10).$$

解 因为

$$e^x=\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},0<\theta<1,$$

于是 $$\left|e^x-\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right|=\left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leqslant\frac{e^{10}}{(n+1)!}10^{n+1}.$$

现令 $$\frac{e^{10}}{(n+1)!}10^{n+1}<0.001,$$

有 $$e^{10}10^{n+4}<(n+1)!,$$

两边的对数有

$$10+(n+4)\ln 10<\sum_{k=2}^{n+1}\ln k, \qquad ①$$

令 $$p_n=\sum_{k=2}^{n+1}\ln k,$$

于是 $$p_n>\int_1^{n+1}\ln t\,dt=(n+1)\ln(n+1)-n.$$

若有 $$(n+1)\ln(n+1)-n>10+(n+4)\ln 10, \qquad ②$$

则 ① 式成立,也就是

$$\left|e^x-\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right|<0.001.$$

当 $n=39$ 时,② 式成立,因此,当 $n=39$ 时,能保证

$$\left|e^x-\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right|<0.001 \qquad (0\leqslant x\leqslant 10).$$

在所指定的区间研究序列的一致收敛性(2746 ~ 2763).

【2746】 $f_n(x)=x^n$;(1) $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$;(2) $0\leqslant x\leqslant 1$.

解 (1) 由 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$,有

$$\lim_{n\to\infty}x^n=0=f(x),$$

任 $\varepsilon>0$，由

$$|f_n(x)-f(x)|=|x|^n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

知，可令 $\left(\frac{1}{2}\right)^n<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}$ 时，有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon, x\in\left[0,\frac{1}{2}\right].$$

取 $$N=\left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right],$$

于是当 $n>N$ 时，任 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，皆有

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)|<\varepsilon,$$

因此，$f_n(x)=x^n$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上一致收敛于零.

(2) 由 $x\in[0,1]$ 知

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}x^n=\begin{cases}1, & x=1,\\ 0, & 0\leqslant x<1.\end{cases}$$

取 $\varepsilon_0\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$，$\forall n\in IN$，令 $x=\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}$ 有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{3}}\right)-f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{3}}\right)\right|=\frac{1}{3}>\varepsilon_0,$$

于是，$f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上收敛，但不一致收敛.

【2747】 $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$；$0\leqslant x\leqslant 1$.

解 由 $x\in[0,1]$ 知

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}[x^n-x^{n+1}]$$

$$=\begin{cases}0, & x=0,\\ 0, & 0<x<1,=0,\\ 0, & x=1.\end{cases}$$

又令 $$g(x)=|f_n(x)-f(x)|=x^n-x^{n+1},$$

由　$g'(x) = x^{n-1}(n-(n+1)x)$,

令 $g'(x)=0$ 有 $x=\dfrac{n}{n+1}$,即 $x\in(0,1)$,$g(x)$ 有唯一驻点. 易知

$x\in[0,1]$ 时 $g(x)$ 在 $x=\dfrac{n}{n+1}$ 处达到最大值,于是有

$$g(x)\leqslant\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

$$=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n+1}, \text{任给 } \varepsilon>0,$$

令　$\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$,

即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 时,有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

从而的 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,任意 $x\in[0,1]$,皆有

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)-0|<\varepsilon.$$

因此,$f_n(x)$ 在$[0,1]$上一致收敛于零.

【2748】 $f_n(x)=x^n-x^{2n};0\leqslant x\leqslant 1$

解　由 $x\in[0,1]$ 有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x),$$

又　$|f_n(x)-f(x)|=x^n-x^{2n}$,

令取 $\varepsilon_0\in\left(0,\dfrac{2}{9}\right)$,$\forall n\in IN$,令 $x=\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}$ 有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{3}}\right)-f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{3}}\right)\right|=\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}=\frac{2}{9}>\varepsilon_0,$$

因此,$f_n(x)$ 在$[0,1]$上收敛,但不一致收敛.

【2749】 $f_n(x)=\dfrac{1}{x+n};0<x<+\infty.$

解　由 $x\in(0,\infty)$ 知

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

而

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{x+n} < \frac{1}{n},$$

于是 $\forall \varepsilon > 0$,令$\frac{1}{n} < \varepsilon$,即 $n > \frac{1}{\varepsilon}$ 时,有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

从而取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n > N$ 时,$\forall x \in (0, +\infty)$,皆有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{x+n} < \varepsilon,$$

因此,$f_n(x)$ 在$(0, +\infty)$ 内一致收敛于零.

【2750】 $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}$;$0 \leqslant x \leqslant 1$.

解 由 $x \in [0,1]$ 知

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n+x}$$

$$= \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x, & x \in (0,1]. \end{cases} = x = f(x).$$

又 $$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx}{1+n+x} - x\right|$$

$$= \frac{x+x^2}{1+n+x} < \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n},$$

任意 $\varepsilon > 0$,令$\frac{2}{n} < \varepsilon$,即 $n > \frac{2}{\varepsilon}$ 时,有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

今取 $$N = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right],$$

因此,$f_n(x)$ 在$[0,1]$ 上一致收敛于 x.

【2751】 $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$;

(1) $0 \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon$;　　(2) $1-\varepsilon \leqslant x \leqslant 1+\varepsilon$;

(3) $1+\varepsilon \leqslant x < +\infty$,其中 $\varepsilon > 0$.

解 (1) 由

$$x \in [0, 1-\varepsilon],$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 0 = f(x),$$

又 $$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^n}{1+x^n} \leqslant (1-\varepsilon)^n, \forall \delta > 0.$$

令 $(1-\varepsilon)^n < \delta$,即 $n > \dfrac{\lg\delta}{\lg(1-\varepsilon)}$ 时,有

$$|f_n(x) - f(x)| < \delta,$$

现令 $N = \left[\dfrac{\lg\delta}{\lg(1-\varepsilon)}\right]$,则当 $n > N$ 时,任 $x \in [0, 1-\varepsilon]$,皆有

$$|f_n(x) - f(x)| < \delta,$$

于是,$f_n(x)$ 在$[0, 1-\varepsilon]$ 上一致收敛于 0.

(2) 由 $x \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$,有

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 1-\varepsilon \leqslant x < 1, \\ \dfrac{1}{2}, & x = 1, \\ 1, & 1 < x \leqslant 1+\varepsilon. \end{cases}$$

现取 $\varepsilon_0 \in \left(0, \dfrac{1}{4}\right)$, $\forall n \in IN$,令 $x = \dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}$,有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{3}}\right) \right| = \frac{1}{4} > \varepsilon_0,$$

因此,$f_n(x)$ 在$[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ 上收敛,但不一致收敛.

【2752】 $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$;(1) $0 \leqslant x \leqslant 1$;

(2) $1 < x < +\infty$.

解 (1) 由 $x \in [0, 1]$ 知

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

现令 $\varepsilon_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\forall n \in IN$, 取 $x = \frac{1}{2n}$, 有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{2n}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right) \right| = \frac{2n \cdot \frac{1}{2n}}{1 + n^2 \cdot \frac{1}{4n^2}} = \frac{4}{5} > \varepsilon_0,$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

(2) 由 $x \in (1, +\infty)$ 知

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

又
$$| f_n(x) - f(x) | = \frac{2nx}{1+n^2x^2} < \frac{2nx}{n^2x^2} < \frac{2}{n},$$

于是任 $\varepsilon > 0$, 令 $\frac{2}{n} < \varepsilon$, 即 $n > \frac{2}{\varepsilon}$ 时, 有

$$| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon,$$

今取 $N = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$, 当 $n > N$ 时, 任 $x \in (1, +\infty)$, 皆有

$$| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon,$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上一致收敛.

【2753】 $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$; $-\infty < x < +\infty$.

解 由 $x \in (-\infty, +\infty)$ 知,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = | x | = f(x),$$

又
$$| f_n(x) - f(x) | = \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - | x | \right|$$

$$= \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + | x |} < \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n},$$

于是任 $\varepsilon > 0$, 令 $\frac{1}{n} < \varepsilon$ 即 $n > \frac{1}{\varepsilon}$ 时, 有

$$| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon,$$

现取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, 则当 $n > N$ 时, $\forall x \in IR$, 皆有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

因此,$f_n(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

【2754】 $f_n(x)=n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$;$0<x<+\infty$.

解 由 $x\in(0,+\infty)$ 知,

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(x+\frac{1}{n}-x\right)}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\xlongequal{\triangle}f(x),$$

令取 $\varepsilon_0\in\left(0,\frac{1}{18}\right)$,任 $n\in IN$,取 $x=\frac{1}{n}$ 有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\left|n\left(\sqrt{\frac{2}{n}}-\sqrt{\frac{1}{n}}\right)-\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{n}}}\right|$$

$$=\sqrt{n}\left|\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right|=\sqrt{n}\,\frac{\sqrt{2}-1}{2(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{n}}{2(\sqrt{2}+1)^2}$$

$$>\frac{1}{18}\sqrt{n}>\varepsilon_0.$$

因此,$f_n(x)$ 在$(0,+\infty)$上收敛,但不一致收敛.

【2755】 (1) $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$;　　$-\infty<x<+\infty$;

(2) $f_n(x)=\sin\frac{x}{n}$;　　$-\infty<x<+\infty$.

解 由 $x\in(-\infty,+\infty)$ 知,

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x),$$

而
$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{|\sin nx|}{n}\leqslant\frac{1}{n},$$

于是任 $\varepsilon>0$,令 $\frac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$ 时,有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

现取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,任 $x\in IR$,皆有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

因此，$f_n(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(2) 由 $x\in(-\infty,+\infty)$ 知

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x),$$

现取 $\varepsilon_0\in(0,1)$，任 $n\in IN$，令 $x=\frac{n\pi}{2}$，有

$$\left|f_n\left(\frac{n\pi}{2}\right)-f\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right|=\left|\sin\frac{\pi}{2}\right|=1>\varepsilon_0,$$

因此，$f_n(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上收敛，但不一致收敛.

【2756】 (1) $f_n(x)=\arctan nx$； $0<x<+\infty$；

(2) $f_n(x)=x\arctan nx$， $0<x<+\infty$.

解 (1) 由 $x\in(0,+\infty)$ 知，

$$\lim_{n\to\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}=f(x).$$

取 $\varepsilon_0\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，任 $n\in IN$，

令 $x=\frac{1}{n}$，

有 $$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\left|\arctan 1-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{4}>\varepsilon_0,$$

因此，$f_n(x)$ 在$(0,+\infty)$ 上收敛，但不一致收敛.

(2) 由 $x\in(0,+\infty)$ 知，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\frac{\pi}{2}x=f(x).$$

又 $$|f_n(x)-f(x)|=x\left|\arctan nx-\frac{\pi}{2}\right|$$

$$=x\left|-\arctan\frac{1}{nx}\right|\leqslant x\cdot\frac{1}{nx}=\frac{1}{n},$$

于是任 $\varepsilon>0$，令 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$ 时，有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

现取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，任 $x\in(0,+\infty)$，皆有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

因此，$f_n(x)$ 在$(0,+\infty)$ 上一致收敛.

【2757】 $f_n(x)=e^{n(x-1)}$；　$0<x<1$.

解　由 $x\in(0,1)$ 知

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x),$$

现令 $\varepsilon_0\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$，任 $n\in IN$，取 $x=1-\frac{1}{2n}$，有

$$\left|f_n\left(1-\frac{1}{2n}\right)-f\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right|=e^{n\left(1-\frac{1}{2n}-1\right)}=e^{-\frac{1}{2}}>\varepsilon_0,$$

因此，$f_n(x)$ 在$(0,1)$ 上收敛，但不一致收敛.

【2758】 $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$；

(1) $-l<x<l$，其中 l 为任意正数；

(2) $-\infty<x<+\infty$.

解　(1) 由 $x\in(-l,l)$ 知，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x),$$

又　$$|f_n(x)-f(x)|=e^{-(x-n)^2}\leqslant e^{-(n-l)^2},$$

于是任 $\varepsilon>0$，令

$$e^{-(n-l)^2}<\varepsilon,$$

即 $n>l+\sqrt{\ln\frac{1}{\varepsilon}}$ 时，有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

从而令　$$N=\left[l+\sqrt{\ln\frac{1}{\varepsilon}}\right],$$

当 $n>N$ 时，$\forall x\in(-l,l)$，皆有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

因此，$f_n(x)$ 在$(-l,l)$ 上一致收敛.

(2) 由 $x\in(-\infty,+\infty)$ 知，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x),$$

令 $\varepsilon_0\in(0,1)$，任 $n\in IN$，取 $x=n$，有

$$|f_n(x)-f(n)|=1>\varepsilon_0,$$

因此 $f_n(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上收敛,但不一致收敛.

【2759】 $f_n(x)=\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$; $0<x<1$.

解 由 $x\in(0,1)$ 知,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}=0,$$

令 $y=\frac{x}{n}$,而

$$\lim_{y\to0^+}y\ln y=\lim_{y\to0^+}(-y)=0,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}=\lim_{y\to0^+}y\ln y=0=f(x).$$

又由 $$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}\right|,$$

知,任 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $0<\frac{x}{n}<\delta$ 时,有

$$\left|\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}\right|<\varepsilon,$$

现令 $N=\left[\frac{1}{\delta}\right]$,当 $n>N$ 时,有$\frac{1}{n}<\delta$,于是任 $x\in(0,1)$,有

$$0<\frac{x}{n}<\frac{1}{n}<\delta,$$

从而 $$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}\right|<\varepsilon,$$

因此,$f_n(x)$ 在$(0,1)$ 上一致收敛.

【2760】 $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$;

(1) 在有穷区间(a,b);(2) 在$(-\infty,+\infty)$ 区间.

解 (1) 由 $x\in(a,b)$ 知

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right\}^x=e^x\qquad(x\neq0),$$

若 $x=0$ 时，$f_n(x)=1$，于是

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=e^x,x\in(a,b),$$

令 $M=\max\{|a|,|b|\}$，由泰勒公式

$$\begin{aligned}\ln f_n(x)&=n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\\&=n\left[\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\theta x}{n}\right)^3}\cdot\frac{x^3}{n^3}\right]\\&=x-\frac{x^2}{2n}+\frac{1}{3\left(1+\frac{\theta x}{n}\right)^3}\cdot\frac{x^3}{n^2},\end{aligned}$$

其中 $\quad \theta\in(0,1),\left|\frac{\theta x}{n}\right|\leqslant\frac{M}{n},|x^3|\leqslant M^3,$

从而 $\quad \ln f_n(x)=x-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$

于是有 $\quad f_n(x)=e^{x-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}=e^x\left[1-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right],$

从而存在 N，当 $n>N$ 时，有

$$|f_n(x)-f(x)|=e^x\left|-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|\leqslant\frac{M^2e^M}{n},$$

任 $\varepsilon>0$，令 $\frac{M^2e^M}{n}<\varepsilon$，即 $n>\frac{M^2e^M}{\varepsilon}$ 时有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

于是现记

$$N_1=\max\left(N,\left[\frac{M^2e^M}{\varepsilon}\right]\right),$$

则当 $n>N_1$ 时，任 $x\in(a,b)$，皆有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

因此，$f_n(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛.

(2) $x\in(-\infty,+\infty)$，$\quad\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=e^x=f(x)$，

由 $\quad |f_n(x)-f(x)|=\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-e^x\right|,$

知，取 $\varepsilon_0 \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$，任 $n \in \mathbb{N}$，令 $x = 2n$，有

$$\begin{aligned}|f_n(2n) - f(2n)| &= |3^n - e^{2n}| \\ &= 3^n\left(\left(\frac{e^2}{3}\right)^n - 1\right) > \varepsilon_0,\end{aligned}$$

因此，$f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛，但不一致收敛.

【2761】 $f_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$；$1 \leqslant x \leqslant a$.

解 由 $x \in [1,a]$ 知

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln x = f(x),$$

又

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &= |n(x^{\frac{1}{n}} - 1) - \ln x| \\ &= |n(x^{\frac{1}{n}} - 1) - n\ln(1 + (x^{\frac{1}{n}} - 1))| \\ &= \Big|n(x^{\frac{1}{n}} - 1) - n(x^{\frac{1}{n}} - 1) \\ &\quad + \frac{n}{2}(x^{\frac{1}{n}} - 1)^2 + nO((x^{\frac{1}{n}} - 1)^3)\Big| \\ &= \frac{1}{2n}\left(\frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) < \frac{(\ln a)^2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

上述不等式是在取定适当的 $N_1 > 0$ 后，当 $n > N_1$ 时成立. 于是任 $\varepsilon > 0$，存在 N_2，当 $n > N_2$ 时，有

$$\frac{(\ln a)^2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) < \varepsilon,$$

现令 $N = \max(N_1, N_2)$，则当 $n > N$ 时，任 $x \in [1,a]$，皆有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

因此，$f_n(x)$ 在 $[1,a]$ 上一致收敛.

【2762】 $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n}$；$0 \leqslant x \leqslant 2$.

解 由 $x \in [0,2]$ 知，当 $x \in [0,1]$ 时，$1 \leqslant \sqrt[n]{1 + x^n} \leqslant \sqrt[n]{2}$，

当 $x\in(1,2]$ 时，　　$x<x\sqrt[n]{1+\left(\frac{1}{x}\right)^n}\leqslant x\sqrt[n]{2}.$

从而　　$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

于是

1° 当 $x\in[0,1]$ 时，

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\sqrt[n]{1+x^n}-1\right|$$

$$=\frac{x^n}{(1+x^n)^{\frac{n-1}{n}}+(1+x^n)^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+(1+x^n)^{\frac{1}{n}}+1}<\frac{1}{n},$$

2° 当 $x\in(1,2]$ 时，

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\sqrt[n]{1+x^n}-x\right|$$

$$=\frac{1}{(1+x^n)^{\frac{n-1}{n}}+x(1+x^n)^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+x^{n-2}\cdot(1+x^n)^{\frac{1}{n}}+x^{n-1}}$$

$$<\frac{1}{nx^{n-1}}<\frac{1}{n},$$

进而任 $\varepsilon>0$，令 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$ 时有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

故令 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，任 $x\in[0,2]$，皆有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

因此，$f_n(x)$ 在 $[0,2]$ 上一致收敛.

【2763】 $f_n(x)=\begin{cases}n^2x, & 若\ 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{n};\\ n^2\left(\frac{2}{n}-x\right), & 若\ \frac{1}{n}<x<\frac{2}{n};\\ 0, & 若\ x\geqslant\frac{2}{n}\end{cases}$

在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 区间.

解　当 $x=0$ 时，$f_n(x)=0$，于是

$$\lim_{n\to\infty}f_n(0)=0,$$

当 $x\in[0,1]$，但 $x\neq 0$ 时，即 $x>0$，从而任 $\varepsilon>0$，存在 $N>\frac{1}{\varepsilon}$，有 $\frac{2}{N}\leqslant x$，进一步当 $n>N$ 时，$\frac{2}{n}<\frac{2}{N}\leqslant x$，故 $f_n(x)=0$，因此

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0,\qquad x\in[0,1].$$

现令 $\varepsilon_0\in(0,1)$，任 $n\in IN$，取 $x=\frac{1}{n^2}$，有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n^2}\right)-f\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|=n^2\cdot\frac{1}{n^2}=1>\varepsilon_0,$$

从而，$f_n(x)$ 在[0,1]上收敛，但不一致收敛.

【2764】 设 $f(x)$ 为定义在区间 $[a,b]$ 的任意函数，且

$$f_n(x)=\frac{[nf(x)]}{n}\qquad(n=1,2,\cdots).$$

证明：当 $n\to\infty$ 时，$f_n(x)\rightrightarrows f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$.

证 由

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{n}|[nf(x)]-nf(x)|\leqslant\frac{1}{n},$$

知对任意 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，对任 $x\in[a,b]$，皆有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

因此，$f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

【2765】 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 具有连续导数 $f'(x)$ 且

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right].$$

证明：在 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 区间上 $f_n(x)\rightrightarrows f'(x)$，其中 $a<\alpha<\beta<b$.

证 令 $a<\alpha'<\alpha<\beta<\beta'<b$，在 $[\alpha',\beta']$ 上，$f_n(x)$ 当 n 充分大后在 $[\alpha',\beta']$ 上有连续的导函数，故由拉格朗日中值定理有

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$$
$$=nf'\left(x+\frac{\theta}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=f'\left(x+\frac{\theta}{n}\right)\ (0<\theta<1),$$

而 $f'(x)$ 在$[\alpha',\beta']$上一致连续，于是任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对任意 $x',x''\in[\alpha',\beta']$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时，有 $|f'(x')-f'(x'')|<\delta$，现令 $N=\left[\frac{1}{\delta}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，$\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\delta$，且对 $x\in[\alpha,\beta]$，只要 N 足够大，就有 x 与 $x+\frac{\theta}{n}$ 皆属于$[\alpha',\beta']$，从而任 $x\in[\alpha,\beta]$，皆有

$$|f_n(x)-f'(x)|=\left|f'\left(x+\frac{\theta}{n}\right)-f'(x)\right|<\varepsilon,$$

因此，$f_n(x)$ 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛于 $f(x)$.

【2766】 设

$$f_n(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{i}{n}\right),$$

其中 $f(x)$ 为在区间$(-\infty,+\infty)$的连续函数. 证明：序列 $f_n(x)$ 在任何有穷区间$[a,b]$一致收敛.

证　$$F(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{i}{n}\right)$$

$$=\int_x^{x+1}f(t)\mathrm{d}t=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x+\frac{i}{n}}^{x+\frac{i+1}{n}}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{i}{n}+\frac{\theta_i}{n}\right)(0<\theta_i<1,i=0,1,\cdots,n-1),$$

因为 $f(x)$ 在$[a,b+1]$上连续，所以 $f(x)$ 在$[a,b+1]$上一致连续，于是任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对任意的 $x',x''\in[a,b+1]$ 有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

现令　$$N=\left[\frac{1}{\delta}\right]+1,$$

则当 $n>N,a\leqslant x\leqslant b$ 时，有

$$\left|\left(x+\frac{i}{n}+\frac{\theta_i}{n}\right)-\left(x+\frac{i}{n}\right)\right|<\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\delta,$$

且 $$x+\frac{i}{n}\in[a,b+1],x+\frac{i}{n}+\frac{\theta_i}{n}\in[a,b+1]$$

$$(i=0,1,\cdots,n-1),$$

从而 $$|F(x)-f_n(x)|$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\left|f\left(x+\frac{i}{n}+\frac{\theta_i}{n}\right)-f\left(x+\frac{i}{n}\right)\right|<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\varepsilon$$

$$=\varepsilon,$$

因此，$f_n(x)$ 在$[a,b]$上一致收敛于 $f(x)$.

研究下列级数的收敛性质(2767 ~ 2773).

【2767】 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$，

(1) 在区间 $|x|<q$;其中 $q<1$;

(2) 在区间 $|x|<1$.

解 (1) 由 $|x|<q,q<1$ 知，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 在 $|x|<q<1$ 内绝对且一致收敛.

(2) 由

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$

知当 $|x|<1$ 时，有

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{1}{1-x}.$$

现令 $\varepsilon_0\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$，对任意的 $n\in IN$，取 $x=\frac{1}{\sqrt[n+1]{3}}$ 有

$$\left|S_n\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{3}}\right)-S\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{3}}\right)\right|=\left|\frac{1-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{\sqrt[n+1]{3}}}-\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt[n+1]{3}}}\right|$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{\sqrt[n+1]{3}}}=\frac{\sqrt[n+1]{3}}{3(\sqrt[n+1]{3}-1)}>\frac{1}{3}>\varepsilon_0,$$

因此，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 在 $|x|<1$ 内收敛，但不一致收敛.

【2768】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$，在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$.

解 由 $x\in[-1,1]$ 知 $\left|\dfrac{x^n}{n^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$ 在 $[-1,1]$ 上绝对收敛，且一致收敛.

【2768.1】 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$，在区间 $(0,+\infty)$.

解 因为

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

又
$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^n}{n!},$$

由
$$|S_n(x)-e^x|=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},$$
$$x\in(0,+\infty),0<\theta<1,$$

知，取 $\varepsilon_0\in(0,1)$，对任意的 $n\in IN$，取 $x=n+1$，有

$$|S_n(n+1)-e^{(n+1)}|=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta(n+1)}>1>\varepsilon_0,$$

因此，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ 在 $(0,+\infty)$ 上收敛，但不一致收敛.

【2769】 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$，在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$.

解 由

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(1-x)x^k$$
$$=(1-x)\sum_{k=0}^{n}x^k=1-x^{n+1},$$

有
$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & x=1.\end{cases}$$

取 $\varepsilon_0 \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$，对任意的 $n \in \mathbb{N}$，令 $x = \frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}$ 有

$$\left|S_n\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right) - S\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right)\right| = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0,$$

因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上收敛，但不一致收敛.

【2770】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$；$-1 \leqslant x \leqslant 1$.

解 由

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1}\right) = x - \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

知，当 $x \in [-1,1]$，有

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = x,$$

又
$$|S_n(x) - S(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n},$$

于是 $\forall \varepsilon > 0$，令 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n > N$ 时，$\forall x \in [-1,1]$，皆有

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛.

【2771】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$；$0 < x < +\infty$.

解 由

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{x}{[(k-1)x+1](kx+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(k-1)x+1} - \frac{1}{kx+1}\right] \\ &= 1 - \frac{1}{nx+1}, \end{aligned}$$

知当 $x\in(0,+\infty)$ 时，有

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=1.$$

现取 $\varepsilon_0\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$. 对任意的 $n\in\mathbb{N}$，令 $x=\frac{1}{n}$，有

$$\left|S_n\left(\frac{1}{n}\right)-S\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\left|1-\frac{1}{2}-1\right|=\frac{1}{2}>\varepsilon_0,$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$ 在 $(0,+\infty)$ 上收敛，但不一致收敛.

【2772】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$; $0<x<+\infty$.

解 由

$$\left|\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}\right|<\frac{1}{n^2}\qquad(x>0),$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛知原级数在 $(0,+\infty)$ 上绝对并一致收敛.

【2773】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$.

(1) $0\leqslant x\leqslant\varepsilon$，其中 $\varepsilon>0$；　(2) $\varepsilon\leqslant x<+\infty$.

解 $x=0$ 时，原级数收敛于零，$x>0$ 时，令

$$u_n(x)=\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}>0,$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{1+(n+1)x}\right]=0<1,$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 收敛 $(x\geqslant0)$，又

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{kx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+kx)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(1+x)\cdots(1+(k-1)x)} - \frac{1}{(1+x)\cdots(1+kx)}\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$$

$$\to 1 \qquad (x > 0, n \to \infty),$$

于是有 $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

(1) 由 $x \in (0,\varepsilon)$ 有

$$|S_n(x) - S(x)| = \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)},$$

现取 $\varepsilon_0 \in (0,1)$，任 $n \in IN$，因为

$$\lim_{x\to+0} \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} = 1,$$

于是存在 $\delta = \delta(\varepsilon_0)$，当 $0 < x < \delta$，有

$$\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} > \varepsilon_0,$$

现取 $x_0 \in (0,\delta)$，有

$$\frac{1}{(1+x_0)(1+2x_0)\cdots(1+nx_0)} > \varepsilon_0,$$

从而 $\quad |S_n(x_0) - S(x_0)| > \varepsilon_0,$

因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$ 上不一致收敛.

(2) 当 $x \in [\varepsilon,\infty)$ 时，由于

$$|u_n(x)| = \left|\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}\right| < \frac{nx}{(1+x)^n}$$

$$= \frac{nx}{1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + x^n}$$

$$< \frac{nx}{\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)x^3} \qquad (n \geqslant 3)$$

$$=\frac{6}{(n-1)(n-2)x^2}<\frac{6}{(n-2)^2\varepsilon^2},$$

而$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{6}{(n-2)^2\varepsilon^2}$收敛，故由维尔斯特拉斯判别法知原级数在$[\varepsilon,+\infty)$上绝对且一致收敛.

【2774】 利用维尔斯特拉斯检验，证明下列函数级数在指定区间的一致收敛性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$，$-\infty<x<+\infty$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$，$-2<x<+\infty$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$，$0\leqslant x<+\infty$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$，$|x|<+\infty$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$，$\frac{1}{2}\leqslant|x|\leqslant 2$；

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$，$|x|<a$，其中 a 为任意正数；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$，$|x|<+\infty$；

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$，$|x|<+\infty$；

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$，$|x|<+\infty$；

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$，$|x|<a$；

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-nx}$，$0\leqslant x<+\infty$；

(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{2x}{x^2+n^3}$, $|x|<+\infty$.

证 (1) 由 $\left|\dfrac{1}{x^2+n^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛,于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^2+n^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(2) 由

$$\left|\frac{(-1)^n}{x+2^n}\right|<\frac{1}{2^n-2},(\text{这里 } n\geqslant 2, x>-2),$$

而
$$\frac{1}{2^n-2}\leqslant\frac{1}{2^n-2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}},$$

又 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}$ 收敛,因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{x+2^n}$ 在 $(-2,+\infty)$ 上一致收敛.

(3) $x=0$ 时,级数收敛于零,当 $x>0$ 时,由 $1+n^4x^2\geqslant 2n^2x$,有 $\left|\dfrac{x}{1+n^4x^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{2n^2}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^2}$ 收敛,因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x}{1+n^4x^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

(4) 由 $|x|<+\infty$,且 $1+n^5x^2\geqslant 2n^{\frac{5}{2}}x$,有

$$\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right|\leqslant\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛,因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx}{1+n^5x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(5) 由 $\dfrac{1}{2}\leqslant|x|\leqslant 2$,有

$$\left|\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})\right|\leqslant\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(|x|^n+|x|^{-n})$$
$$\leqslant\frac{2^{n+1}\cdot n^2}{\sqrt{n!}},$$

又
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^{n+2}(n+1)^2}{\sqrt{(n+1)!}}}{\dfrac{2^{n+1}n^2}{\sqrt{n!}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)^2}{n^2\sqrt{n+1}}=0<1,$$

于是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n+1}n^2}{\sqrt{n!}}$收敛，从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$当$\dfrac{1}{2}\leqslant|x|\leqslant 2$时一致收敛.

(6) 当$n=2m$时，$u_{2m}=\dfrac{x^{2m}}{m!}$，由$|x|<a$，有

$$\left|\frac{x^{2m}}{m!}\right|<\frac{a^{2m}}{m!},$$

又
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a^{2m+2}}{(m+1)!}}{\dfrac{a^{2m}}{m!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^2}{m+1}=0<1,$$

于是$\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{a^{2m}}{m!}$收敛. 当$n=2m+1$时

$$u_{2m+1}=\frac{x^{2m+1}}{m!}\left|\frac{x^{2m+1}}{m!}\right|<\frac{a^{2m+1}}{m!},$$

类似地$\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{a^{2m+1}}{m!}$收敛.

因此，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2m}(x)$和$\sum\limits_{m=1}^{\infty}u_{2m+1}(x)$在$|x|<a$上一致收敛，从而原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{\left[\dfrac{n}{2}\right]!}$在$|x|<a$上一致收敛.

(7) 由$\left|\dfrac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$收敛，因此级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$在$|x|<+\infty$上一致收敛.

(8) 由$\left|\dfrac{\cos nx}{n^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2}$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

(9) 由$\left|\dfrac{\sin nx}{n\sqrt{n}}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

(10) 由 $|x|<a$ 有

$$\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 x}\right)=\frac{x^2}{n\ln^2 n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\qquad (n\text{ 充分大}),$$

又 $\left|\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right|\leqslant\frac{a^2}{n\ln^2 n}$，由题2619知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{a^2}{n\ln^2 n}$ 收敛，又 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 也收敛，因此，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$ 在 $(-a,a)$ 上一致收敛.

(11) 由 $x>0$ 有 $e^{nx}>1+nx+\frac{n^2x^2}{2}>\frac{n^2x^2}{2}$，于是 $e^{-nx}<\frac{2}{n^2x^2}$，从而 $|x^2e^{-nx}|<\frac{2}{n^2}$，当 $x=0$ 时，显然 $|x^2e^{-nx}|<\frac{2}{n^2}$ 仍成立，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ 收敛，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$ 在 $x\geqslant 0$ 上一致收敛.

(12) 由 $x^2+n^3\geqslant 2n^{\frac{3}{2}}|x|$，有 $\left|\frac{2x}{x^2+n^3}\right|\leqslant\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，又存在 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时

$$\left|\arctan\frac{2x}{x^2+n^3}\right|=\left|\frac{2x}{x^2+n^3}+O\left(\left(\frac{2x}{x^2+n^3}\right)^2\right)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

而 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，$\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 皆收敛，因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{x}{x^2+n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

研究下列函数级数在指定区间的一致收敛性(2775 ~ 2782).

【2775】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$；(1) 在区间 $\varepsilon\leqslant x\leqslant 2\pi-\varepsilon$，这里 $\varepsilon>0$；(2) 在 区间 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

解 (1) 由 $\varepsilon\leqslant x\leqslant 2\pi-\varepsilon(\varepsilon>0)$ 知

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}},$$

又$\left\{\frac{1}{n}\right\}$趋于零，由狄利克雷检验法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$在$[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$上一致收敛.

(2) 由题 2698 知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$在$[0,2\pi]$上条件收敛，下证该级数在$[0,2\pi]$上不一致收敛.

用反证法. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$在$[0,2\pi]$上一致收敛，令

$$U_n(x)=\frac{\sin nx}{n}\qquad(n=1,3,\cdots),$$

则任$\varepsilon>0$，存在N_1(与x无关)，当$n\geqslant N_1$时，对任$x\in[0,2\pi]$，皆有

$$|U_{n+1}(x)+U_{n+2}(x)+\cdots+U_{n+p}(x)|<\varepsilon,$$

其中p为任意自然数.

现取$N_2\geqslant 2N_1$，令

$$n_0=\max\left(\left[\frac{N_2}{2}\right],\left[\frac{N_2+1}{2}\right]\right),$$

有$n_0\geqslant N_1$. 取p满足$n_0+p=N_2+1$，于是有

$$|U_{n_0+1}(x)+U_{n_0+2}(x)+\cdots+U_{n_0+p}(x)|<\varepsilon,$$

即
$$\left|\sum_{\frac{N_2}{2}+1\leqslant n<N_2+2}U_n(x)\right|<\varepsilon\qquad(\forall x\in[0,2\pi]),\qquad①$$

现取$x_0=\frac{1}{N_2+2}\cdot\frac{\pi}{2}$，① 式成立，又当$\frac{N_2}{2}+1\leqslant n<N_2+2$时，有$0<nx_0<\frac{\pi}{2}$，从而

$$\sin nx_0\geqslant nx_0\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{n}{N_2+2},$$

于是$U_n(x_0)=\frac{\sin nx_0}{n}\geqslant\frac{1}{N_2+2}$，进而有

$$\sum_{\frac{N_2}{2}+1\leqslant n<N_2+2} U_n(x_0)\geqslant \frac{1}{N_2+2}\sum_{\frac{N_2}{2}+1\leqslant n<N_2+2} 1$$

$$\geqslant \frac{1}{N_2+2}\cdot\frac{1}{2}(N_2+2)=\frac{1}{2}.$$

与 ① 矛盾，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0,2\pi]$ 上条件收敛，但不一致收敛.

【2776】 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$；$0<x<+\infty$.

解 令 $a_n(x)=2^n\sin\frac{1}{3^n x}$，由 $x\in(0,+\infty)$ 知

$$|a_n(x)|\leqslant 2^n\cdot\frac{1}{3^n x}=\frac{1}{x}\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 绝对收敛，下面证明 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内不一致收敛，用反证法，设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内一致收敛，于是任 $\varepsilon\in(0,1)$，存在 $N=N(\varepsilon)$，当 $n\geqslant N$ 时，对任 $x\in(0,+\infty)$，任 $p\in IN$ 皆有

$$|a_{n+1}(x)+a_{n+2}(x)+\cdots+a_{n+p}(x)|<\varepsilon,$$

现取 $\quad P=1, n=N,$

则 $\quad |a_{n+1}(x)|<\varepsilon<1.$

今取 $x_0=\frac{2}{3^{N+1}\pi}\in(0,+\infty)$，

则有 $\quad |a_{n+1}(x_0)|<1,$

但 $\quad a_{N+1}(x_0)=2^{N+1}\sin\frac{1}{3^{N+1}x_0}$

$$=2^{N+1}\sin\frac{\pi}{2}=2^{N+1}>1,$$

矛盾，从而原级数在 $(0,+\infty)$ 上收敛，但不一致收敛.

【2777】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n};0<x<+\infty$.

提示:评估级数的余项.

解 由 $x\in(0,+\infty)$ 知 $\frac{1}{n+x}<\frac{1}{n}$,从而 $\left\{\frac{1}{n+x}\right\}$ 单调一致趋于零, 又 $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right|\leqslant 1$, 故由狄里克雷判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛.

【2778】 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x};0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

解 由 $x\in[0,2\pi],n\geqslant 2$ 知

$$0<\frac{1}{n+\sin x}<\frac{1}{n-1},$$

于是 $\left\{\frac{1}{n+\sin x}\right\}$ 对每一个 $x\in[0,2\pi]$ 单调递减且一致于零,又 $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right|\leqslant 1$,因此,原级数在 $[0,2\pi]$ 上一致收敛.

【2779】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}};|x|\leqslant 10$.

解 由 $|x|\leqslant 10$ 知

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^{-10}}}<\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}},$$

又 $$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}>\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2+e^x}},$$

于是 $\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}\right\}$ 对每一个 $x\in[-10,10]$ 皆单调递减,且一致趋向零. 又 $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\right|\leqslant 2$,故由狄里克雷判别法知原级数在 $[-10,10]$ 上一致收敛.

【2780】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$; $-\infty<x<+\infty$.

解 由 $x\in(-\infty,+\infty)$ 知,$\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}\leqslant\frac{1}{n}$,于是$\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}\right\}$对每一个 $x\in(-\infty,+\infty)$ 皆单调递减,且一致地趋于零. 又

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2n\pi}{3}\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{\pi}{3}\right|}=\frac{2}{\sqrt{3}},$$

故由狄里克雷判别法知,原级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

【2781】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x}}$; $0\leqslant x<+\infty$.

解 由 $x\in[0,+\infty)$ 知,$\frac{1}{\sqrt{n+x}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}$,从而$\left\{\frac{1}{\sqrt{n+x}}\right\}$对每一个 $x\in[0,+\infty)$ 皆单调递减且一致地趋于零,又

当 $x=2l\pi(l=0,1,2\cdots)$ 时,

$$\sum_{k=1}^{n}\sin x\sin kx=0.$$

当 $x\neq2l\pi(l=0,1,2,\cdots)$ 时,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin x\sin kx\right|=|\sin x|\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|$$

$$\leqslant|\sin x|\cdot\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}=2\left|\cos\frac{x}{2}\right|\leqslant2.$$

于是,对任 $x\in[0,+\infty)$,皆有$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin x\sin kx\right|\leqslant2$,故由狄里克雷判别法知,原级数在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

【2782】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}$; $0\leqslant x<+\infty$.

解 由于

$$\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}=\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}},$$

且由 2672 知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$关于$x$一致收敛.

又$\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}\right\}$对每一个$x\in[0,+\infty)$皆是单调增加的，且$\left|\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}\right|\leqslant 1$. 因此，由阿贝尔判别法知，原级数在$[0,+\infty]$上一致收敛.

【2783】 不连续函数的序列能一致收敛成连续函数吗？

研究例题：

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\psi(x)\qquad(n=1,2,\cdots).$$

其中
$$\psi(x)=\begin{cases}0, & 若 x 为无理数.\\ 1, & 若 x 为有理数.\end{cases}$$

解　可能，如函数序列

$$f_n(x)=\frac{\varphi(x)}{n}\qquad(n=1,2\cdots),$$

其中
$$\varphi(x)=\begin{cases}0, x 为无理数,\\ 1, x 为有理数.\end{cases}$$

显然，$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$上每一点皆不连续，但由$|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{n}$知，$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致趋于零而$f(x)\equiv 0$在$(-\infty,+\infty)$显然是连续函数.

【2784】 证明：若级数$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$在区间$[a,b]$一致收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在区间$[a,b]$也能一致收敛.

证 由题意知,任给 $\xi>0$,存在 $N=N(\xi)$,当 $n>N$ 时,对任 $x\in[a,b]$,任 $p\in N$ 皆有

$$|f_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)|+\cdots+|f_{n+p}(x)|<\xi,$$

由
$$|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)|$$
$$\leqslant|f_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)|+\cdots+|f_{n+p}(x)|<\xi,$$

知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在$[a,b]$上一致收敛.

【2785】 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在区间$[a,b]$绝对并一致收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ 在区间$[a,b]$一定能一致收敛吗?

研究例题 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$,其中 $0\leqslant x\leqslant 1$.

解 不一定,如级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在$[0,1]$上绝对并且一致收敛,但其绝对值级数不一致收敛.事实上 $x\in[0,1]$ 时

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n(1-x)x^n|=\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n,$$

又由 2769 题知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$ 在$[0,1]$上收敛.但不一致收敛.下面证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在$[0,1]$上一致收敛.当 $x=0,x=1$ 时,级数显然收敛.当 $x\in(0,1)$ 时

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nx^n.$$

是交错级数且满足莱布尼兹条件,收敛.为证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在$[0,1]$上的一致收敛性,我们只要证明其余项

$$R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k(1-x)x^k,$$

一致趋于零即可. 又

$$|R_n(x)| \leqslant (1-x)x^{n+1}, x \in [0,1] \qquad ①$$

令 $$g(x) = (1-x)x^{n+1}, x \in [0,1],$$

易知 $g(x)$ 在 $x = \frac{n+1}{n+2}$ 处达到最大值. 于是,当 $x \in [0,1]$ 时,

$$0 \leqslant g(x) \leqslant g\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} < \frac{1}{n+2},$$

从而,由 ① 知

$$|R_n(x)| < \frac{1}{n+2} \qquad (x \in [0,1], n = 1,2\cdots),$$

故我们有 $R_n(x)$ 在$[0,1]$上是一致收敛趋于零.

【2786】 证明绝对收敛且一致收敛的级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

其中 $$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } 0 \leqslant x \leqslant 2^{-(n+1)}; \\ \frac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x), & \text{若 } 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}; \\ 0, & \text{若 } 2^{-n} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

不能用收敛的正项数项级数作为其强级数.

证 首先证明 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在$[0,1]$上是一致收敛的,令

$$R_{n,p}(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x), \quad x \in [0,1],$$

有 $$R_{n,p}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}\sin^2(2^{n+2}\pi x), & x \in (2^{-(n+2)}, 2^{-(n+1)}), \\ \frac{1}{n+2}\sin^2(2^{n+3}\pi x), & x \in (2^{-(n+3)}, 2^{-(n+2)})\cdots, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{1}{n+p}\sin^2(2^{n+p+1}\pi x), & x \in (2^{-(n+p+1)}, 2^{-(n+p)}), \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

于是 $\quad |R_{n,p}(x)|<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$,

从而任意 $\varepsilon>0$,取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$,则当 $n>N$ 时,对任 $x\in[0,1]$,任 $p\in N$,皆有 $|R_{n,p}(x)|<\varepsilon$,故由柯西准则,$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在[0,1] 上绝对收敛且一致收敛,下面证明不能用某正项收敛数项级数作为其强级数,用反证法,设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,$a_n\geqslant 0$ 是收敛的强级数,即

$$|f_n(x)|\leqslant a_n,(n=1,2\cdots,\forall x\in[0,1]). \quad ①$$

现取 $\quad x_n=\frac{3}{2}2^{-(n+1)}$,

有 $\quad 2^{-(n+1)}<x_n<2^{-n}$,

于是 $\quad a_n\geqslant|f_n(x_n)|=\frac{1}{n^2}\sin^2(2^{n+1}\pi x_n)=\frac{1}{n}>0$,

由 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 也收敛,矛盾.

【2787】 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ 的各项在区间[a,b] 是单调函数.该级数在这个区间的端点绝对收敛,则该级数在区间[a,b] 是绝对收敛并一致收敛的.

证 由题意,$\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(a)|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(b)|$ 皆收敛,令

$$U_n=\max(|\varphi_n(a)|,|\varphi_n(b)|),$$

由 $0\leqslant U_n\leqslant|\varphi_n(b)|+|\varphi_n(a)|$ 知 $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ 收敛,又 $\varphi_n(x)$ 在[a,b] 上单调,于是

$$|\varphi_n(x)|\leqslant u_n \quad (a\leqslant x\leqslant b,n=1,2\cdots),$$

据维尔斯特拉斯判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ 在[a,b] 上绝对且一

致收敛.

【2788】 证明:幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在全部位于其收敛区间内的任何闭区间上都是绝对收敛且一致收敛的.

证 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间为 $(-R,R)(R>0)$,任取 $[a,b]\subset(-R,R)$,令 $l=\max(|a|,|b|)$,故任意 $x\in[a,b]$ 有

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n|\cdot|l|^n = |a_n l^n|,$$

由题意知 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n l^n|$ 收敛,因此,幂级数在 $[a,b]$ 上绝对且一致收敛.

【2789】 设 $a_n \to \infty$,且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_n}\right|$ 收敛. 证明:级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x-a_n}$$

在任何不含有 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 点的有界闭集中都是绝对收敛并一致收的敛.

证 设 S 是任一不包含 $a_n(n=1,2\cdots)$ 点的有界闭集. 于是存在 $C>0$,当 $x\in S$ 时有 $|x|\leqslant C$,且

$$\left|\frac{x}{a_n}\right| \neq 1 \qquad (n=1,2\cdots),$$

又由题设 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_n}\right|$ 收敛,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n|}=0,$$

于是存在 N,当 $n>N$,对任 $x\in S$,有 $\left|\frac{x}{a_n}\right|<\frac{1}{3}$,从而,当 $n>N$ 时,有

$$\left|\frac{1}{x-a_n}\right| = \frac{1}{|a_n|}\cdot\frac{1}{\left|1-\frac{x}{a_n}\right|}$$

$$\leqslant \frac{1}{|a_n|} \cdot \frac{1}{1-\left|\frac{x}{a_n}\right|}$$

$$\leqslant \frac{1}{|a_n|} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2|a_n|},$$

又$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2|a_n|}$收敛,于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{x-a_n}\right|$在 S 上绝对且一致收敛.

【2790】 证明:若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛,则狄利克雷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$当 $x \geqslant 0$ 时也一致收敛.

证 因为$0<\frac{1}{n^x}\leqslant 1$,$\left\{\frac{1}{n^x}\right\}$对每一个$x\geqslant 0$皆是单调的. 又$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$当$x\geqslant 0$时一致收敛,因此,由阿贝尔判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$当$x \geqslant 0$时一致收敛.

【2791】 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛,证明:级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$在$x\geqslant 0$域内一致收敛.

解 因为$0<e^{-nx}\leqslant 1(x\geqslant 0)$,且$\{e^{-nx}\}$对每一个$x\geqslant 0$是单调的,又$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$在$x\geqslant 0$上一致收敛,因此,由阿贝尔判别法,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$在$x\geqslant 0$上一致收敛.

【2792】 证明:函数$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$在域$-\infty<x<+\infty$内连续并具有连续导数.

证 由$\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right| \leqslant \frac{1}{n^3}$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$收敛知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛,又由$\frac{\sin nx}{n^3}$在$(-\infty,+\infty)$上连续,因此$f(x) \triangleq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$在$(-\infty,+\infty)$上连续. 又$\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right)' = \frac{\cos nx}{n^2}$,且级

数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，故$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

【2793】　证明函数：

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)^2},$$

(1) 在一切点上有定义且是连续的，但整数点$x=0,\pm1,\pm2,\cdots$，除外；

(2) 是周期等于1的周期函数.

证　把级数$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$分为两块：

(A) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$ 和(B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-n-x)^2}$.

易知，当$x\neq k(k\in N)$时级数(A)收敛，当$x\neq -k(k\in IN)$时，级数(B)收敛，因此，当$x\neq 0,\pm1,\pm2\cdots$时，级数$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$收敛.

(1) 于是$f(x)$在除去$x=0,\pm1,\pm2\cdots$外的一切点上有定义，设x_o是定义域中的任一点，则令$x_o\in([x_o],[x_o]+1)$，令

$$[x_o]<a<x_o<b<[x_o]+1,$$

则$[a,b]$是$([x_o],[x_o]+1)$上包含x_o的一个闭区间. 记$q=\max(|a|,|b|)$，在$[a,b]$上考察级数(A)和(B)，$x\in[a,b]$知，存在n_o，当$n\geqslant n_o$时有

$$\left|\frac{1}{(n-x)^2}\right|\leqslant\frac{1}{(n-|x|)^2}\leqslant\frac{1}{(n-q)^2},$$

$$\left|\frac{1}{(-n-x)^2}\right|\leqslant\frac{1}{(n-|x|)^2}\leqslant\frac{1}{(n-q)^2}.$$

又$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n-q)^2}$收敛，因此，级数$\sum_{n=n_o}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$和$\sum_{n=n_o}^{+\infty}\frac{1}{(-n-x)^2}$在$[a,b]$上一致收敛，于是级数$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$和$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(-n-x)^2}$在$[a,$

$b]$ 上一致收敛，即 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 又由 $\frac{1}{(n-x)^2}$ 在 $[a,b]$ 上连续知，该级数的和函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续从而 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

(2) 当 $x\neq 0,\pm1,\pm2\cdots$ 时

$$f(x+1)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{[n-(x+1)]^2}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{[(n-1)-x]^2}\overset{\text{令 }m=n-1}{=\!=}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(m-x)^2}=f(x),$$

所以，当 $x\neq 0,\pm1,\pm2\cdots$ 时，$f(x)$ 是以 1 为周期的函数.

【2794】 证明：级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[nxe^{-nx}-(n-1)xe^{-(n-1)x}],$$

在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 非一致收敛，但是它的和在这个区间是连续函数.

证 由

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}[kxe^{-kx}-(k-1)xe^{-(k-1)x}]=nxe^{-nx},$$

知 $$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}nxe^{-nx}=0\qquad(x\in[0,1]),$$

显然在 $[0,1]$ 上连续，但该级数在 $[0,1]$ 上不一致收敛，用反证法，设该级数在 $[0,1]$ 上一致收敛，于是任 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(\varepsilon)$，当 $n\geqslant N$，对任意 $x\in[0,1]$，皆有

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon,$$

现取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}e^{-1}$，则存在 N_0，当 $n\geqslant N_0$ 时，任 $x\in[0,1]$，皆有

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon_0=\frac{1}{2}e^{-1},$$

今取 $x=\frac{1}{n}$,从而

$$\left|S_n\left(\frac{1}{n}\right)-S\left(\frac{1}{n}\right)\right|<\frac{1}{2}e^{-1},$$

但 $$\left|S_n\left(\frac{1}{n}\right)-S\left(\frac{1}{n}\right)\right|=S_n\left(\frac{1}{n}\right)=n\cdot\frac{1}{n}e^{-n\cdot\frac{1}{n}}$$

$$=e^{-1}>\frac{1}{2}e^{-1},$$

矛盾. 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[nxe^{-nx}-(n-1)xe^{-(n-1)x}\right],$$

在[0,1]上不一致收敛.

【2795】 确定函数 $f(x)$ 的存在域并研究它的连续性,设

(1) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$;

(2) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}$;

(3) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n}$.

证 (1) 由

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\right|}=|x|,$$

知,当 $|x|<1$ 时,级数绝对收敛. 当 $|x|>1$ 时,级数发散. 当 $|x|=1$ 时,通项不趋于零,级数发散,所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$,下证 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续. 令 $0<\delta<1$,当 $|x|\leqslant 1-\delta$ 时,

$$\left|\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\right|\leqslant\left(1-\delta+\frac{1}{n}\right)^n.$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\delta+\frac{1}{n}\right)^n$ 收敛,于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ 在 $[-1+\delta,1-\delta]$ 上一致收敛,从而 $f(x)$ 在 $[-1+\delta,1-\delta]$ 上连续,由 δ 可以任

意小,知 $f(x)$ 在$(-1,1)$内连续.

(2) 因为

$$\frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}=\frac{x}{x^2+n^2}+(-1)^n\frac{n}{x^2+n^2},$$

由阿贝尔判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{x^2+n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛,因此,其和函数在$(-\infty,+\infty)$上连续,又 $\forall C>0$,当$x\in[-C,C]$时,由$\left|\frac{x}{x^2+n^2}\right|\leqslant\frac{C}{n^2}$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n^2}$收敛,有级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2+n^2}$在$[-C,C]$上一致收敛,从而其和函数在$[-C,C]$上连续,由$C$的任意性知上述和函数在$(-\infty,+\infty)$上连续,于是$f(x)$是这两个级数的和,在$(-\infty,+\infty)$上有定义且连续.

(3) 当 $x\neq 0$ 时,由

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|}{(1+x^2)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{|x|}}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}<1,$$

知级数绝对收敛,当 $x=0$ 时,级数收敛到零.于是 $f(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$.设任取一点 $x_0\in(-\infty,+\infty)$.且 $x_0\neq 0$,不妨设 $x_0>0$,我们取 a、b 满足 $0<a<x_0<b$,显然当 $x\in[a,b]$ 时有

$$\left|\frac{x}{(1+x^2)^n}\right|\leqslant\frac{b}{(1+a^2)^n}.$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b}{(1+a^2)^n}$收敛,于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n}$在$[a,b]$上一致收敛,又$\frac{x}{(1+x^2)^n}(n=1,2,\cdots)$连续,从而和函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,因此,$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续,且

$$f(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}$$

$$=x\cdot\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1-\frac{1}{1+x^2}}=\frac{1}{x},(x\neq 0),$$

于是　　$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}, & x\neq 0.\end{cases}$

由此，我们有 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，在 $x\neq 0$ 处连续.

【2796】　设 $r_k(k=1,2,\cdots)$ 是 $[0,1]$ 区间的有理数. 证明函数

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x-r_k|}{3^k}\quad(0\leqslant x\leqslant 1),$$

具有以下性质：(1) 连续性；(2) 在无理点可微分和在有理点不可微分.

证　(1) 由 $x\in[0,1]$ 知 $\left|\dfrac{x-r_k}{3^k}\right|\leqslant\dfrac{1}{3^k}$，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x-r_n|}{3^n}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛. 而 $\dfrac{|x-r_n|}{3^n}(n=1,2,\cdots)$ 连续，因此，和函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续.

(2) 设 $x_0\in[0,1]$，且 x_0 为无理点，当 $x\neq x_0$ 时

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x),\tag{①}$$

其中　　$v_n(x)=\dfrac{|x-r_n|-|x_0-r_n|}{3^n(x-x_0)}\qquad(n=1,2,\cdots)$,

又　　$|x-r_n|-|x_0-r_n|\leqslant|(x-r_n)-(x_0-r_n)|=|x-x_0|$,

于是　　$|v_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{3^n},(x\neq x_0)$,

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 在 $(0,1)$，$x\neq x_0$ 上一致收敛. 此外，对每个固定的 n，由于 $x_0\neq r_n$，故当 x 与 x_0 充分接近时，$(x-r_n)$ 与 (x_0-r_n) 同号，于是

$$\lim_{x\to x_0}v_n(x)=\frac{1}{3^n}\mathrm{sgn}(x_0-r_n)\qquad(n=1,2,\cdots),$$

从而当 $x\to x_0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 可逐项求极限，由 ① 式有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}v_n(x)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\operatorname{sgn}(x_0-r_n).$$

因此,$f(x)$ 在点 x_0 处可微,且

$$f'(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\operatorname{sgn}(x_0-r_n).$$

设 $x_0\in[0,1]$ 为一个有理点,则 $x_0=r_m$,m 为某正数,这时 ① 式为当 $x\neq x_0$ 时

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=v_m(x)+\sum_{k\neq m}^{\infty}v_k(x),\qquad ②$$

其中 $$v_m(x)=\frac{|x-r_m|-|x_0-r_m|}{3^m(x-x_0)}$$
$$=\frac{|x-x_0|}{3^m(x-x_0)}=\frac{1}{3^m}\operatorname{sgn}(x-x_0).$$

类似于 ① 知:当 $x\to x_0$ 时,$\sum\limits_{k\neq m}v_k(x)$ 可逐项取极限,得

$$\lim_{x\to k_0}\sum_{k\neq m}v_k(x)=\sum_{k\neq m}\lim_{x\to x_0}v_k(x)$$
$$=\sum_{k\neq m}\frac{1}{3^k}\operatorname{sgn}(x_0-x_k),$$

又 $$\lim_{x\to x_0+}v_m(x)=\frac{1}{3^m},\ \lim_{x\to x_0-}v_m(x)=-\frac{1}{3^m},$$

于是$\lim\limits_{x\to x_0}v_m(x)$ 不存在,由 ② 式即知$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 不存在,故 $f(x)$ 在点 x_0 不可微.

【2797】 证明黎曼 ζ 函数

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

在 $x>1$ 时连续且在这个域内具有各阶的连续导数.

证 由 $x>1$ 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$ 收敛,各项求导后所得级数为

$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$. 设 $1<a\leqslant x<+\infty$. 则有 $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$ 在$[a,\infty]$上一致收敛,事实上,当 $x\in[a,\infty)$ 时,有

$$0<\frac{\ln n}{n^x}\leqslant\frac{\ln n}{n^a},$$

又由

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{\ln n}{n^a}}{\frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{a-1}{2}}}=0,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}\left(\frac{a+1}{2}>1\right)$ 收敛,于是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^a}$ 收敛,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$ 在$[a,\infty)$上一致收敛,又 $\frac{\ln n}{n^x}(n=1,2,\cdots)$ 是 x 的连续函数,故有

$$\zeta'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}, \qquad ①$$

且 $\zeta'(x)$ 在$[a,\infty)$上连续,由 $a>1$ 的任意性知 ① 式对任意 $x\in(1,\infty)$ 皆成立,且 $\zeta'(x)$ 在$(1,\infty)$上连续,于是 $\zeta(x)$ 也在$(1,\infty)$上连续.

由数学归纳法,且对任 $k\in IN$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^k}{n^a}(a>1)$ 皆收敛,同理可证:任 $k\in IN$, $\zeta^{(k)}(x)$ 在$(1,+\infty)$上皆存在且连续,且

$$\zeta^{(k)}(x)=(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^k}{n^x}, x\in(1,+\infty).$$

【2798】 证明 θ 函数

$$\theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-\pi n^2 x}$$

当 $x>0$ 时有定义且可无穷次微分.

证 令 $u_n(x)=e^{-\pi n^2 x}$,有 $u_{-n}(x)=u_n(x)$,于是对 $\theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}u_n(x)$ 收敛可微性只要考虑级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x} \qquad (x>0),$$

即可.

任意 $x\in(0,+\infty)$,存在 n_0,当 $n\geqslant n_0$ 时,有

$$0<e^{-\pi n^2 x}<\frac{1}{n^2 x},$$

而级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^2 x}(x>0)$ 收敛,从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}e^{-\pi n^2 x}$ 收敛,对级数各项求导后有 $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\pi n^2 e^{-\pi n^2 x}$,下证该级数在 $[\varepsilon,+\infty)$ 内是一致收敛的 $(\varepsilon>0)$. 事实上,存在 $n_1>0$,当 $n\geqslant n_1$ 时,对任 $x\in[\varepsilon,+\infty)$ 皆有

$$0<\pi n^2 e^{-\pi n^2 x}\leqslant \pi n^2 e^{-\pi n^2 \varepsilon}<\frac{1}{n^2\varepsilon},$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\varepsilon}$ 收敛,从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\pi n^2 e^{-\pi n^2 x}$ 在 $[\varepsilon,+\infty)$ 上一致收敛,又级数的各项都是连续函数,故有

$$\theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-\pi n^2 x}$$

在 $[\varepsilon,+\infty)$ 内连续可微,由 $\varepsilon>0$ 的任意性知 $\theta(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续可微,且

$$\theta'(x)=-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\pi n^2 e^{-\pi n^2 x},x\in(0,+\infty),$$

同理可证 $\theta'(x)$ 的可微性. 由数学归纳法,且存在 $n_k>0$,当 $n\geqslant n_k$ 时,对任 $x\in[\varepsilon,+\infty)$,皆有

$$0<(\pi n^2)^k e^{-\pi n^2 x}<\frac{1}{n^2\varepsilon},$$

从而 $\theta(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内 k 次可微,这里 $k\in N$. 因此,$\theta(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无穷可微.

【2799】 确定函数 $f(x)$ 的存在域并研究它的可微性，设

(1) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$；

(2) $f(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n^2+x^2}$，

解 (1) 当 $x\neq -k(k=1,2,\cdots)$ 时，级数是交错级数，由莱布尼兹判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$ 收敛.

任取 x_0，$x_0\neq -k(k\in N)$，

1° 当 $x_0\geqslant 0$ 时，取 $\beta>x_0$，于是 $x_0\in\left[-\frac{1}{2},\beta\right]$，令

$$u_n(x)=\frac{(-1)^n x}{n+x},$$

则
$$u'_n(x)=\frac{(-1)^n n}{(n+x)^2}\qquad n=1,2,\cdots,x\in\left[-\frac{1}{2},\beta\right],$$

且在 $\left[-\frac{1}{2},\beta\right]$ 上连续，又 $\left\{\frac{n}{(n+x)^2}\right\}$ 单调下降且一致趋于零，这是由于 $x\in\left[-\frac{1}{2},\beta\right]$，$n>1$ 时，有

$$\left|\frac{n}{(n+x)^2}\right|\leqslant\frac{n}{(n-1)^2}\to 0\qquad(n\to\infty),$$

又 $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$ 有界，因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{2},\beta\right]$ 上一致收敛. 从而 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$ 在 $\left(-\frac{1}{2},\beta\right)$ 上可微，于是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微.

2° 当 $x_0<0$ 时，存在 $k_0\in N$，满足

$$-(k_0+1)<x_0<-k_0,$$

现取 α,β 满足

$$-(k_0+1)<\alpha<x_0<\beta<-k_0,$$

在区间 $[\alpha,\beta]$ 上

$$u'_n(x)=\frac{(-1)^n n}{(n+x)^2},$$

连续,又

$$\left|\frac{(-1)^n n}{(n+x)^2}\right|=\frac{n}{n^2+2nx+x^2}\leqslant\frac{n}{n^2-2n\mid x\mid}$$
$$\leqslant\frac{n}{n^2-2n\mid\alpha\mid}=\frac{1}{n-2\mid\alpha\mid},$$

于是$\left\{\frac{n}{(n+x)^2}\right\}$单调下降,且一致趋于零,又$\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right|\leqslant 1$. 因此$\sum_{n=1}u'_n(x)$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛,从而

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x},$$

在(α,β)上可微,显然在$x=x_0$处可微,综上所述,函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$$

在$x\neq -k(k=1,2,\cdots)$上有定义且可微.

(2) $x=0$时,级数显然收敛

当$x\neq 0$时,因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\mid x\mid}{n^2+x^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+x^2}\mid x\mid=\mid x\mid,$$

于是$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mid x\mid}{n^2+x^2}(x\neq 0)$收敛,进一步有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mid x\mid}{n^2+x^2},$$

在$(-\infty,+\infty)$上收敛.

设$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2}$,显然$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义,于是$f(x)=\mid x\mid\cdot g(x)$,任取$x_0\in(-\infty,+\infty)$,则有$m>0$. 满

足 $-m < x_0 < m$，当 $x \in [-m, m]$ 时，有

$$\left|\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)'\right| = \left|\frac{-2x}{(n^2+x^2)^2}\right| \leqslant \frac{2m}{n^4} \quad (n = 1,2,\cdots),$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2m}{n^4}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)'$ 在 $[-m,m]$ 上一致收敛. 进而 $g(x)$ 在 $[-m,m]$ 上可微，于是 $g(x)$ 在 $x = x_0$ 点可微，又 $|x|$ 在 $x \neq 0$ 处可微，在 $x = 0$ 处不可微，且 $g(x) > 0$，因而 $f(x) = |x| g(x)$ 在 $x \neq 0$ 处可微，在 $x = 0$ 处不可微.

【2800】 证明序列：

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\arctan x^n \quad (n = 1,2,\cdots).$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 区间一致收敛，但是

$$[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]'_{x=1} \neq \lim_{n\to\infty} f'_n(1)$$

证　由

$$|\arctan x^n| \leqslant \frac{\pi}{2} \quad (n = 1,2,\cdots),$$

知　$$|f_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{2n} \quad (n = 1,2,\cdots, x \in (-\infty, +\infty)),$$

于是　$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0,$$

现任给 $\varepsilon > 0$，取 $N = \left[\frac{\pi}{2\varepsilon}\right]$，当 $n > N$ 时，对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$，皆有 $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\pi}{2n} \leqslant \frac{\pi}{2(N+1)} \leqslant \frac{\pi}{2\cdot\frac{\pi}{2\varepsilon}} = \varepsilon.$

从而，$f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛于零. 又

$$f'_n(x) = \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}},$$

有　$$f'_n(1) = \frac{1}{2},$$

于是　$$\lim_{n\to\infty} f'_n(1) = \frac{1}{2}.$$

而　$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$，所以 $(\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = 0$，

于是 $\quad (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))'\big|_{x=1} = 0 \neq \dfrac{1}{2}.$

【2801】 证明序列:

$$f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

在$(-\infty,+\infty)$区间一致收敛,但是

$$[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]' \neq \lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

证 因为

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(x^2 + \frac{1}{n}\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) = x^2,$$

又 $\quad |f_n(x) - f(x)| = \left|\dfrac{1}{n}\sin n\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant \dfrac{1}{n},$

于是任意的$\varepsilon > 0$,令$N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,当$n > N$时,对任意$x \in (-\infty, +\infty)$,有$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$,

故$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

又 $\quad (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))' = f'(x) = 2x,$

而 $\quad f'_n(x) = 2x + \cos n\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right).$

于是$\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$不存在. 因此

$$(\lim_{n\to\infty} f_n(x))' \neq \lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

【2802】 当参数α为何值时:(1) 序列

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx} \quad (n = 1,2,\cdots), \qquad ①$$

① 在$[0,1]$区间收敛;

(2) 序列 ① 在$[0,1]$区间一致收敛;

(3) 能够在积分号下取极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x?$$

解 (1) 当$x = 0$时,$f_n(x) = 0$,

当$x \neq 0$时,$x \in [0,1]$,对任意$\alpha \in R$,皆有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n^\alpha x \mathrm{e}^{-nx} = 0,$$

故任意 $\alpha \in IR$，$f_n(x)$ 在$[0,1]$上收敛于函数 $f(x)=0$

(2) 由

$$f'_n(x) = n^\alpha \mathrm{e}^{-nx}(1-nx),$$

令 $\quad f'_n(x) = 0,$

有 $\quad x = \dfrac{1}{n},$

而当 $x < \dfrac{1}{n}$ 时 $f'_n(x) > 0$，当 $x > \dfrac{1}{n}$ 时，$f'_n(x) < 0$，故 $x = \dfrac{1}{n}$ 为 $f_n(x)$ 在$[0,1]$上的最大值点，于是

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-1} \qquad (x \in [0,1]),$$

当 $\alpha < 1$ 时，

$$n^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-1} \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

进而，任意的 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，对一切 $x \in [0,1]$，皆有 $|f_n(x) - 0| < \varepsilon$，也就是当 $\alpha < 1$ 时，$f_n(x)$ 在$[0,1]$上一致收敛于零. 当 $\alpha \geqslant 1$ 时，$f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) \not\to 0$，因而 $f_n(x)$ 在$[0,1]$上不一致趋于零.

(3) 由题设，问 α 为何值时，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]\mathrm{d}x, \qquad (*)$$

由 $\quad \displaystyle\int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]\mathrm{d}x = \int_0^1 0\mathrm{d}x = 0,$

又

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} n^\alpha \int_0^1 x\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^\alpha\left(-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n} - \frac{1}{n^2}\mathrm{e}^{-n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-2}(1 - \mathrm{e}^{-n} - n\mathrm{e}^{-n}),$$

于是要使$(*)$式成立，我们可问 α 为何值时

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha-2}(1 - \mathrm{e}^{-n} - n\mathrm{e}^{-n}) = 0.$$

显然，$\alpha < 2$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 0,$$

也就是当 $\alpha < 2$ 时

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

【2803】 证明序列:

$$f_n(x) = nx\mathrm{e}^{-nx^2},(n = 1,2,\cdots).$$

在$[0,1]$区间收敛,但是

$$\int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]\mathrm{d}x \neq \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x.$$

证 当 $x = 0$ 时

$$f_n(x) = 0, \quad (n = 1,2,\cdots).$$

当 $x \neq 0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$,故 $f_n(x)$ 在$[0,1]$上收敛于零. 又

$$\int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\mathrm{d}x = \int_0^1 0\mathrm{d}x = 0,$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx\mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-nx^2}\right)\Big|_0^1 \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-n}\right) = \frac{1}{2} \neq 0,\end{aligned}$$

于是有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \neq \int_0^1 [\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)]\mathrm{d}x.$

【2804】 证明序列:

$$f_n(x) = nx(1-x)^n,(n = 1,2,\cdots),$$

在区间$[0,1]$收敛而非一致收敛,但是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

证 当 $x = 0, x = 1$ 时,

$$f_n(x) = 0,(n = 1,2,\cdots).$$

当 $x \in (0,1)$ 时,由洛必达法则知

$$\lim_{n\to\infty} nx(1-x)^n = 0 = f(x).$$

于是 $f_n(x)$ 在$[0,1]$上收敛于零,下面说明 $f_n(x)$ 在$[0,1]$上不一

致收敛. 现取 ε_0, 使

$$0<\varepsilon_0<\frac{1}{2e}, 任 n\in IN.$$

令 $$x_n=\frac{1}{n+1},$$

有 $$\left|f_n\left(\frac{1}{n+1}\right)-f(x)\right|=\left|f_n\left(\frac{1}{n+1}\right)-0\right|$$

$$=n\cdot\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1},$$

于是 $$\lim_{n\to\infty}\left|f_n\left(\frac{1}{n+1}\right)-f(x)\right|=e^{-1}.$$

故存在 $n_0>0$, 当 $n>n_0$ 时, 有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n+1}\right)\right|>\frac{1}{2e}>\varepsilon_0,$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

又 $$\int_0^1[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]dx=\int_0^1 0dx=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx(1-x)^n dx$$

$$\xlongequal{令\ y=1-x}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n(1-y)y^n dy$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}y^{n+1}-\frac{n}{n+2}y^{n+2}\right)\Big|_0^1$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)}=0,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]dx.$$

【2805】 在下式中 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^4}dx$ 在积分号下取极限是否合理?

解 因为

$$\int_0^1\left[\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^4}\right]dx=\int_0^1 0dx=0,$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\arctan nx^2\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

于是在积分号下取极限不合理.

注:一般地,若$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛,则它是保证在积分号下取极限的一个充分条件,但若$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上不一致收敛时,则不一定能保证可以在积分号下取极限.

求解(2806 ～ 2808).

【2806】 $\lim\limits_{x\to1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}$.

解 由题意可设 $x\in[0,1]$,因为$\frac{x^n}{x^n+1}\leqslant1$,且$\left\{\frac{x^n}{x^n+1}\right\}$关于$n$单调下降,又级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$在$[0,1]$上一致收敛,于是由阿贝尔判别法知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}, \qquad ①$$

在$[0,1]$上一致收敛,又$\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}$在$[0,1]$上连续,

$$\lim_{x\to1^-}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}=\frac{(-1)^{n+1}}{2n}, \qquad (n=1,2,\cdots).$$

于是
$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\lim_{x\to1^-}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}\right]\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n},\end{aligned}$$

由 2661 题知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln2$,于是

$$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}=\frac{1}{2}\ln2.$$

【2807】 $\lim\limits_{x\to1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{n+1})$.

解　由题意，不妨设 $x \in [0,1)$，而

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty}x^n(1-x) = \frac{x(1-x)}{1-x} = x,$$

于是　$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n+1}) = \lim_{x\to 1^-}x = 1.$$

【2808】　$\lim\limits_{x\to+0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$.

解　由题意，不妨设 $x \in [0,1]$，由于 $\frac{1}{n^x}$ 在 $[0,1]$ 上单调下降，且小于或等于 1，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛，因而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛，又因为 $\frac{1}{2^n n^x}$ 在 $[0,1]$ 上连续，且

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2^n n^x} = \frac{1}{2^n},$$

因而 $$\lim_{x\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1.$$

【2808.1】　$\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}$.

解　由题意，可设 $x \in [M,+\infty)$，$M > 0$，

由　$$0 < \frac{x^2}{1+2^n n^x} \leqslant \frac{x^2}{2^n n^x},\ x \in [M,+\infty).$$

考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{2^n n^x}$ 在 $[M,+\infty)$ 上的一致收敛性.

因为　$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{n^x} = 0,$$

于是　任 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，当 $x > N$ 时，有

$$0 < \frac{x^2}{n^x} < \varepsilon,$$

从而 $\frac{x^2}{n^x}$ 在 $[M,+\infty)$ 上有界，又 $\left\{\frac{x^2}{n^x}\right\}$ 对每一 $x \in [M,+\infty)$ 关于 n 单调递减. 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 在 $[M,+\infty)$ 上一致收敛，于是由阿贝尔判

别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{2^n n^x}$在$[M,+\infty)$上一致收敛，因此，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+2^n n^x}$在$[M,+\infty)$上一致收敛. 又

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+2^n n^x}=0,$$

知
$$\lim_{x\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+2^n n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1+2^n n^x}=0.$$

【2809】 逐项微分级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{x}{n^2}$是否合理?

解 由

$$\left(\arctan\frac{x}{n^2}\right)_x'=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{n^2}\right)^2}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{n^2}{n^4+x^4}\leqslant\frac{1}{n^2},$$

且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\frac{x}{n^2}\right)_x'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+x^2}$在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛. 又

$$\left|\arctan\frac{x}{n^2}\right|\leqslant\frac{|x|}{n^2},$$

我们有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{x}{n^2}$收敛. 因此，原级数和的导数可以用逐项微分来计算.

【2810】 在$[0,1]$区间逐项积分级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}})$是否合理?

解 设

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(x^{\frac{1}{2k+1}}-x^{\frac{1}{2k-1}}),$$

于是当$x=0,1$时，

$$S_n(x)=0.$$

当$x\in(0,1)$时，

$$S_n(x)=x^{\frac{1}{2n+1}}-x.$$

从而　　$S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}0, & x=0,1,\\ 1-x, & 0<x<1.\end{cases}$

令　$\varepsilon_0\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，对任 $n\in IN$，

取　　$x_n=\frac{1}{x^{2n+1}}$，

有　　$|S_n(x_n)-S(x_n)|=\frac{1}{2}>\varepsilon_0$，

因此，$S_n(x)$ 在$[0,1]$上不一致收敛.

又　　$\int_0^1\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n-1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)\right]dx=\int_0^1(1-x)dx=\frac{1}{2}$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2}-\frac{2n-1}{2n}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)-\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)=\frac{1}{2}.$$

于是本题的级数在$[0,1]$上作逐项积分计算是合理的.

注：此题说明，级数在$[a,b]$上一致收敛仅是可以逐项积分的一个充分条件.

【2811】 设 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 为无穷次可微分函数且它的导数 $f^{(n)}(x)(n=1,2,\cdots)$ 的序列在每一个有穷区间(a,b)可一致收敛至函数 $\varphi(x)$. 证明 $\varphi(x)=Ce^x$，其中 C 为常数.

证　因为 $f(x)$ 任意可微，于是 $f^{(n)}(x)$ 在(a,b)内连续且可微，又

$$f^{(n)}(x)\rightrightarrows\varphi(x),x\in(a,b),$$

且　　$f^{(n+1)}(x)\rightrightarrows\varphi(x),x\in(a,b)$，

从而 $\varphi(x)$ 在(a,b)内可微，且

$$\varphi'(x)=[\lim_{n\to\infty}f^{(n)}(x)]'=\lim_{n\to\infty}[f^{(n)}(x)]'$$

$$= \lim_{n\to\infty} f^{(n+1)}(x) = \varphi(x).$$

于是我们有

$$\ln\varphi(x) = x + C,$$

即 $\varphi(x) = Ce^{x}$,C 为常数.

【2811.1】 设函数 $f_n(x)$,$n=1,2,\cdots$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义且有界,而且在每一个 $[a,b]$ 区间 $f_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$. 由此能够得出 $\lim\limits_{x\to\infty} \sup\limits_{x} f(x) = \sup\limits_{x} \varphi(x)$ 吗?研究例题 $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$,$n=1,2,\cdots$.

解 不一定,如

$$f_n(x) = e^{-(x-n)^2}, n = 1,2,\cdots,$$

显然 任意 $x \in (-\infty,+\infty)$

有 $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} e^{-(x-n)^2} = 0$,

且 $|f_n(x)| = \dfrac{1}{e^{(x-n)^2}} < 1, (n = 1,2,\cdots)$.

又 $-\infty < a < b < +\infty$,在 $[a,b]$ 上,令

$$M = \max\{|a|, |b|\},$$

有 $|f_n(x)| = \dfrac{1}{e^{(x-n)^2}} < \dfrac{1}{e^{(n-M)^2}}$,

于是 $f_n(x) \rightrightarrows 0, x \in [a,b]$.

而 $\sup\limits_{x}\varphi(x) = 0, \sup\limits_{x} f_n(x) = \sup\limits_{x} e^{-(x-n)^2} = 1$,

于是 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x} f_n(x) = 1 \neq 0 = \sup\limits_{x}\varphi(x)$.

§5. 幂级数

1. **收敛区间** 对于每一个幂级数

$$a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

都存在收敛闭区间:$|x-a| \leqslant R$. 该级数在其内收敛,而在其外部发散. 收敛半径 R 可根据柯西 — 阿达玛公式确定:

$$\rho=\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

如果极限存在，则收敛半径 R 也可以按照下式计算：

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

2. **阿贝尔定理**　若幂级数

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n(|x|<R),$$

在收敛区间的端点 $x=R$ 上收敛，则

$$S(R)=\lim_{x\to R-0}S(x),$$

3. **泰勒级数**　在 a 点的解析函数 $f(x)$ 可在这个点的某个邻域展开为幂级数：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

这个级数的余项：

$$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

可以写成：

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\qquad(0<\theta<1),$$

（拉格朗日型）或写成

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta_1(x-a))}{n!}(1-\theta_1)^n(x-a)^{n+1},$$

$$(0<\theta_1<1),$$

（柯西型）．

必须记住以下五个基本的展开式：

(1) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty)$；

(2) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots,$

$(-\infty<x<+\infty)$；

(3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,$

$$(-\infty < x < +\infty);$$

(4) $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots,$

$$(-1 < x < 1);$$

(5) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots,$

$$(-1 < x < 1).$$

4. **幂级数的运算**　在公共的收敛区间 $|x-a| < R$ 内有：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)(x-a)^n;$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n;$

其中，

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0;$$

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-a)^n;$

(4) $\int\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\right]\mathrm{d}x = c + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}.$

5. **复数域的幂级数**　研究级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

其中，

$$c_n = a_n + ib_n, a = \alpha + i\beta,$$
$$z = x + iy, i^2 = -1$$

对于每一个这样的级数都有一个闭收敛圆 $|z-a| \leqslant R$，在其内部该级数收敛(而且绝对收敛)，而在其外发散. 收敛半径 R 等于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$ 在实数域的收敛半径.

确定下列幂级数的收敛半径和收敛区间，并研究其在收敛区间端点的性质(2812 ～ 2832).

【2812】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$.

解 令 $a_n=\frac{1}{n^p}$,

由 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^p}}{\frac{1}{(n+1)^p}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^p$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p=1.$$

于是收敛半径 $R=1$,从而收敛区间的端点为 $x=-1,x=1$.

1° $x=-1$ 情形,若 $p>1$,则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 绝对收敛,若 $0<p\leqslant1$,则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛,若 $p\leqslant0$,则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 发散.

2° $x=1$ 情形,若 $p>1$,则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 绝对收敛,若 $p\leqslant1$,则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散.

【2813】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$.

解 令 $a_n=\frac{3^n+(-2)^n}{n}$,

由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{1}{3}$,

知该幂级数的收敛半径为$\frac{1}{3}$,于是级数在 $|x+1|<\frac{1}{3}$ 上收敛,从而收敛区间的端点为 $x=-\frac{2}{3},x=-\frac{4}{3}$.

1° $x=-\frac{4}{3}$ 情形,此时幂级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\cdot(-1)^n\frac{1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}\right],$$

$$由\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}{n}}=\frac{2}{3}<1,$$

有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$收敛，又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$收敛.因而当$x=-\dfrac{4}{3}$时，幂级数收敛.

2° $x=-\dfrac{2}{3}$情形，此时幂级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}\right],$$

由 1° 知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}$绝对收敛，又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，于是我们有$x=-\dfrac{2}{3}$时，幂级数发散.

综上所述，幂级数收敛域为$\left[-\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

【2814】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.

解 令

$$a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!},$$

$$由\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}=4,$$

知，收敛半径$R=4$，从而收敛区间的端点为$x=-4$，$x=4$.

1° $x=-4$情形.由 Stirling 公式

$$n!=\sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n}(1+o(1))$$

$$有\qquad \left|\frac{(n!)^2}{(2n)!}(-4)^n\right|=\frac{(\sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n})^2(1+o(1))}{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}(1+o(1))}\cdot 4^n$$

$$= \sqrt{n\pi}(1+o(1)),$$

于是 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n!)^2(-4)^n}{(2n)!}\right| = +\infty.$$

从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(-4)^n$ 发散.

2° $x=4$ 情形，此时幂级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n))}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)},$$

令 $$u_n = \frac{2\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!},$$

有 $$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{2n+2}\right) = -\frac{1}{2} < 1,$$

故当 $x=4$ 时，幂级数收敛. 综上所述该幂级数的收敛区间为 $(-4,4]$.

【2815】 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n^2}\cdot x^n \quad (0<\alpha<1).$

解 令 $a_n = \alpha^{n^2}, \alpha\in(0,1)$,

由 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha^{2n+1}} = +\infty,$$

于是收敛半径 $R=+\infty$，收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$.

【2816】 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n.$

解 令 $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$,

由 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}\right]^n\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}\right\}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{e}},$$

有收敛半径 $R=\frac{1}{e}$,从而收敛区间的端点 $x=\pm\frac{1}{e}$,

又 $$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\left(\pm\frac{1}{e}\right)^n\right|=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(\frac{1}{e}\right)^n$$
$$=\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right]^n,$$

有 $$\lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(\pm\frac{1}{e}\right)^n\right|=1\neq 0,$$

所以幂级数在收敛区间的端点处发散,即收敛区间为$\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$.

【2817】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a^{n^2}}x^n \quad (a>1)$.

解 记 $a_n=\frac{n!}{a^{n^2}}$,

由 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{2n+1}}{n+1}=+\infty,(a>1),$$
知收敛半径为 $R=+\infty$,于是收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

【2818】 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\right]^p\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$.

解 令 $a_n=\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!1}\right]^p\cdot\frac{1}{2^n}$,

由 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[2\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p\right]=2,$$
知收敛半径为 $R=2$,于是收敛区间端点为 $x=-1,x=3$.

(1) $x=-1$ 情形,此时级数为
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p,$$

由 2689 题知:若 $p>2$,该级数绝对收敛;若 $0<p\leqslant 2$,该级数条件收敛;若 $p\leqslant 0$,该级数发散.

(2) $x=3$ 情形,此时级数为
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p,$$

当 $p>2$ 时，该级数收敛；当 $p\leqslant 2$ 时，该级数发散.

【2819】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p x^n$.

解 令 $a_n=(-1)^n\left[\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p$,

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^p=2^p$,

知收敛半径 $R=2^p$，收敛区间的端点为 $x=\pm 2^p$.

(1) $x=-2^p$ 情形，此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p.$$

令 $u_n=\left[\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p$,

由

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)^p=\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)^p$$
$$=1+\frac{p}{2n+2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=1+\frac{p}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

知当 $\frac{p}{2}>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；当 $\frac{p}{2}\leqslant 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

(2) $x=2^p$ 情形，此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^p, \quad ①$$

由 2689 题知：$p>2$ 时，由级数 ① 绝对收敛；$0<p\leqslant 2$ 时，级数 ① 条件收敛；当 $p\leqslant 0$ 时，通项不趋于零，级数 ① 发散.

【2820】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n$.

解 令 $a_n=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$,

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right|=1$,

知收敛半径 $R=1$，于是收敛区间端点为 $x=\pm 1$.

(1) $x=1$ 情形，此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n},\qquad ①$$

由 2700 题知：当 $m\geqslant 0$ 时，级数 ① 绝对收敛；当 $-1<m<0$ 时，级数 ① 条件收敛；当 $m\leqslant -1$ 时，级数 ① 发散.

(2) $x=-1$ 情形，此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{m}{n},\qquad ②$$

由(1)知，当 $m\geqslant 0$ 时，级数 ② 绝对收敛；当 $m<0$ 时，若 m 是负整数，设 $m=-k(k\in IN)$，则通项为

$$\frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!}$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)\cdots(k+n-1)}{(k-1)!},$$

于是当 $n\to+\infty$ 时，通项趋于无穷大，级数 ② 发散；若 $m\neq -k(k\in IN)$，当 $m<-l(l>0)$ 有通项大于 $\frac{l(l+1)\cdots(l+n-1)}{n!}$，级数 ② 发散；于是，当 $m<0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{m}{n}$ 发散.

【2821】 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n\qquad(a>0,b>0)$.

解 原级数是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}x^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n^2}x^n$ 的和.

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}x^n$ 易知收敛半径为 $R_1=\frac{1}{a}$，对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n^2}x^n$ 的收敛半径为 $R_2=\frac{1}{b}$，于是原级数的收敛半径为 $R=\min(R_1,R_2)$，收敛区间的端点为 $x=\pm R$.

(1) $x=-R$ 情形，若 $a<b$，此时原级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(-\frac{1}{b}\right)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}, \qquad ①$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{n+1}}{(-1)^n\cdot\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{n}}\right|=\frac{a}{b}<1,$$

知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n$ 绝对收敛. 而 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$ 绝对收敛. 因此, $a<b$ 时, 级数 ① 绝对收敛. 当 $a\geqslant b$ 时, 此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(-\frac{1}{a}\right)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n, \qquad ②$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 条件收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^n$ 当 $b<a$ 时, 绝对收敛; 当 $b=a$ 时, 条件收敛. 于是当 $a\geqslant b$ 时, 级数 ② 条件收敛.

(2) $x=R$ 情形, 若 $a<b$, 此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(\frac{1}{b}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n+\frac{1}{n^2}\right],$$

由(1) 知该级数绝对收敛, 若 $a\geqslant b$ 时, 此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(\frac{1}{a}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^n,$$

易知发散.

【2822】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}\quad(a>0,b>0)$.

解 令 $c_n=\frac{1}{a^n+b^n}$,

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\max(a,b)\cdot\dfrac{1+\theta^{n+1}}{1+\theta^n}\right]$

$=\max(a,b)$,

其中 $\theta=\dfrac{\min(a,b)}{\max(a,b)},0<\theta\leqslant 1$,

知收敛半径 $R=\max(a,b)$,收敛区间端点为 $x=\pm R$.

又 $|x|=R$ 时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R^n}{a^n+b^n}=1\neq 0,$$

故我们有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{R^n}{a^n+b^n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^nR^n}{a^n+b^n}$ 皆发散,于是收敛区间为 $(-R,R)$.

【2823】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}\quad(a>0)$.

解 令 $c_n=\dfrac{1}{a^{\sqrt{n}}}$,

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}a^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}=1$,

知收敛半径 $R=1$,于是收敛区间端点为 $x=\pm 1$.

(1) $x=1$ 情形,此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}, \qquad ①$$

由 $n\left(\dfrac{\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}}{\frac{1}{a^{\sqrt{n+1}}}}-1\right)=\dfrac{a^{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}-1}{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}\cdot\dfrac{n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$,

知 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}}{\frac{1}{a^{\sqrt{n+1}}}}-1\right)=\begin{cases}+\infty, & a>1,\\ -\infty, & a<1.\end{cases}$

于是由拉阿比判别法,当 $a>1$ 时,级数 ① 收敛;当 $a<1$ 时,级数 ① 发散;又 $a=1$ 时,通项为 1,级数 ① 发散.

(2) $x=-1$ 情形，此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}, \qquad ②$$

由(1)，当 $a>1$ 时，级数 ② 绝对收敛；当 $a\leqslant 1$ 时，通项不趋于零，级数 ② 发散.

综上所述，$|x|=1$ 时，若 $a>1$，级数绝对收敛；若 $a\leqslant 1$，级数发散.

【2824】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^{-\sqrt{n}}x^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

解 令 $a_n=\dfrac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}$,

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left[3^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\cdot\dfrac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{\sqrt{n^2+1}}\right]=1$,

知收敛半径 $R=1$，收敛区间端点为 $x=\pm 1$.

(1) $x=1$ 情形，此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}, \qquad ①$$

因为 $0<\dfrac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}<\dfrac{1}{3^{\sqrt{n}}}$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^{\sqrt{n}}}$ 收敛(2823 题的结论). 于是级数 ① 收敛.

(2) $x=-1$ 情形，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}, \qquad ②$$

由 ① 知级数 ② 绝对收敛.

【2825】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n$.

解 令

$$a_n=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{2n+2}=1$,

知收敛半径 $R=1$,收敛区间端点为 $x=\pm 1$.

(1) $x=1$ 情形,此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

由拉阿比判别法知该级数发散.

(2) $x=-1$ 情形,此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

它是交错级数,由

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2n+3}{2n+2}>1,$$

知 $a_n>a_{n+1}$,又

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=0,$$

于是据莱布尼兹判别法,$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ 收敛.

【2826】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n x^n$.

解 令

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n,$$

由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=1,$

知收敛半径 $R=1$,收敛区间端点为 $x=\pm 1$.

(1) $x=-1$ 情形,此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n, \qquad ①$$

由 Stirling 公式有

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{2n\pi}\mathrm{e}^{-n}n^n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}},$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$发散，故级数 ① 发散.

(2) $x=1$ 情形，此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n, \qquad ②$$

由(1)，$\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n = 0,$$

又
$$\frac{\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}{\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}} = \frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1,$$

于是级数 ② 满足莱布尼兹条件，级数 ② 收敛.

【2827】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n.$

解 令

$$a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1,$

知，收敛半径$R=1$，又$|x|=1$时，$a_n\to\infty(n\to\infty)$，我们有该幂级数的收敛区间为$(-1,1)$.

【2828】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n.$

解 令 $a_n = \frac{[3+(-1)^n]^n}{n},$

由 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = 4,$

知，收敛半径为$R=\frac{1}{4}$，收敛区间的端点为$x=\pm\frac{1}{4}$.

(1) $x=\frac{1}{4}$ 情形,此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n\cdot 4^n}, \qquad ①$$

该级数可分为两部分,一部分为 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$,一部分为 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}$,显然 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$ 发散,又由柯西判别法知 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}$ 收敛,于是级数 ① 发散.

(2) $x=-\frac{1}{4}$ 情形,同理,原级数可拆成一个发散级数与一个收敛级数的和,因此,$x=-\frac{1}{4}$ 时,级数发散.

【2829】 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(1+2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n}x^n$.

解 令

$$a_n=\frac{\left(1+2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n},$$

由 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=3$,

知收敛半径为 $R=\frac{1}{3}$,收敛区间端点为 $x=\pm\frac{1}{3}$.

当 $|x|=\frac{1}{3}$ 时,设 $n=8k$,由

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+2\cos 2k\pi)^{8k}}{\ln 8k}\cdot\frac{1}{3^{8k}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln k+\ln 8},$$

而 $\frac{1}{\ln k+\ln 8}>\frac{1}{k+\ln 8}>0$ 知,级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln k+\ln 8}$ 发散.

对于

$$n=8k+1,8k+2,\cdots,8k+7,(k=1,2,\cdots).$$

情形,此时级数为

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(1+2\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n}{\ln n}\left(\pm\frac{1}{3}\right)^n. \qquad ①$$

因为$\left\{\frac{1}{\ln n}\right\}$单调趋于零，又

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\left(1+2\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n\right|\cdot\frac{1}{3^n}\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n$$
$$<\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n<5.$$

由狄里克雷判别法知，级数 ① 收敛. 综上所述，当 $|x|=\frac{1}{3}$ 时，原级数是由一个发散级数和七个收敛，级数依次相加而得到的，因此，它是发散的.

【2830】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$.

解 令 $a_n=\frac{1}{2^n}$，

由 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}$，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}=1$，

知收敛半径为 $R=1$，当 $|x|=1$ 时，由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(\pm 1)^{n^2}}{2^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n},$$

收敛，于是收敛区间为$[-1,1]$.

【2831】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}x^n$ （普林斯海姆级数）

解 令 $a_n=\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$，

由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$，

知收敛半径 $R=1$，收敛区间的端点为 $x=\pm 1$.

(1) $x=1$ 情形，此时级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$，由 2672 题知，该级

数条件收敛.

(2) $x=-1$ 情形,此时级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]+n}}{n}, \tag{①}$$

令 $A_l=\{n\mid[\sqrt{n}]=l\},(l=1,2,\cdots)$,

于是 A_l 中的元素可表示为

$$n=l^2+s,s=0,1,2,\cdots,2l.$$

设

$$\begin{aligned}u_l&=\sum_{n\in A_l}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]+n}}{n}\\&=\sum_{s=0}^{2l}\frac{(-1)^{l^2+l+s}}{l^2+s}=\sum_{s=0}^{2l}\frac{(-1)^s}{l^2+s}\\&=\frac{1}{l^2}-\left(\frac{1}{l^2+1}-\frac{1}{l^2+2}\right)-\cdots\\&\quad-\left(\frac{1}{l^2+2l-1}-\frac{1}{l^2+2l}\right)\\&\leqslant\frac{1}{l^2},(l=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

由于$\sum\limits_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l^2}$ 收敛,于是$\sum\limits_{l=1}^{\infty}u_l$ 收敛. 又当 $i\neq j$ 时,$A_i\cap A_j=\varnothing$.

所以$\mathbb{N}=A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots$,易知级数 ① 与级数$\sum\limits_{l=1}^{\infty}u_l$ 有相同的敛散性,于是级数 ① 收敛.

【2832】 求超越几何级数的收敛域:

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1\cdot2\ldots n\cdot\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n+\cdots$$

解 令

$$a_n=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot2\cdots n\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)},$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}=1$,
知收敛半径 $R=1$,收敛区间的端点为 $x=\pm1$.

当 $x=1$ 时,此时级数为

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}+\cdots,$$

由 $$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\theta_n}{n^2}\qquad(|\theta_n|\leqslant L),$$

知,当 $\gamma-\alpha-\beta+1>1$,即 $\gamma-\alpha-\beta>0$ 时,级数收敛;当 $\gamma-\alpha-\beta\leqslant0$ 时,级数发散.

当 $x=-1$ 时,由

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\theta_n}{n^2},$$

知,当 $\gamma-\alpha-\beta>0$ 时,级数绝对收敛;当 $\gamma-\alpha-\beta<-1$ 时,存在 $n_0>0$,当 $n>n_0$ 时,有 $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|<1$,即 $|a_n|<|a_{n+1}|$,于是 $a_n\not\to0$,级数发散;当 $-1<\gamma-\alpha-\beta$ 时,级数去掉有限项后,成为交错级数,且每项的绝对值单调递减,求通项(绝对值)的极限可写成无穷乘积 $\prod\limits_{n=n_0}^{\infty}\dfrac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}$,由

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}=\sum_{n=n_0}^{\infty}\ln\left(1-\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\theta'_n}{n^2}\right)=-\infty,$$

$$(|\theta'_n|\leqslant M),$$

于是无穷乘积的值为零,即 $a_n\to0(n\to\infty)$,由此,级数收敛. 当 $\gamma-\alpha-\beta=-1$ 时,由

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\theta'_n}{n^2},$$

知无穷乘积的值 $\neq$ 零. 于是 $a_n\not\to0$,级数发散. 综上所述,超越几何级数的敛散情况如下:

$\lvert x\rvert<1$		绝对收敛
$\lvert x\rvert>1$		发散
$x=1$	$\gamma-\alpha-\beta>0$	绝对收敛
	$\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$	发散
$x=-1$	$\gamma-\alpha-\beta>0$	绝对收敛
	$-1<\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$	条件收敛
	$\gamma-\alpha-\beta\leqslant -1$	发散

求出下列广义幂级数的收敛域(2833 ～ 2837).

【2833】 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

解 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2n+3}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n}}\right|=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|,$$

知,当 $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$,即 $x>0$ 时,级数绝对收敛;当 $x<0$ 时,$\left|\frac{1-x}{1+x}\right|>1$,级数发散;当 $x=0$ 时,此时级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$,发散.

于是,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域为 $(0,+\infty)$.

【2834】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}$.

解 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{x^{n+1}}\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{1}{x}\right|\cdot\frac{\frac{\pi}{2^{n-1}}}{\frac{\pi}{2^n}}\right)=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{x}\right|,$$

知,当 $\left|\frac{1}{2x}\right|<1$,即 $\lvert x\rvert>\frac{1}{2}$ 时,级数绝对收敛;当 $\lvert x\rvert<\frac{1}{2}$,有

$\left|\frac{1}{2x}\right|>1$,级数发散;当 $|x|=\frac{1}{2}$ 时,由

$$\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{\pi}{2^n}=\pi\neq 0,$$

知级数发散. 于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}$ 的收敛域为 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 及 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

【2835】 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{x^n}{2n^2}$.

解 由

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{x^n}{2^{n^2}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n^2}}\frac{1}{x^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}},$$

知,我们只要考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n^2}}\frac{1}{x^n}$ 的收敛域,对级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}$ 而言,由 2815 题知,收敛域为 $(-\infty,+\infty)$;对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n^2}}\cdot\frac{1}{x^n}$,收敛域为 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$. 由此,级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2^{n^2}}x^n$ 的收敛域为 $\{x\mid x\in R,x\neq 0\}$.

【2836】 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^{-nx}$.

解 由

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^{-nx}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}e^{-x}=e^{-(x+1)},$$

知,当 $e^{-(1+x)}<1$,即 $1+x>0$ 时,级数绝对收敛;当 $e^{-(1+x)}>1$,即 $1+x<0$ 时,级数发散;当 $x=-1$ 时,级数为

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^n$，而

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^n=1\neq 0,$$

于是该级数发散. 综上所述，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^{-nx}$的收敛域为$(-1,+\infty)$.

【2837】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}\tan^n x$.

解 令$a_n=\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}$,

由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)(3n+2)}{9(n+1)^2}=1$,

知，当$|\tan x|<1$，即当$|x-k\pi|<\frac{\pi}{4}(k\in\mathbb{Z})$时，级数绝对收敛；当$|x-k\pi|>\frac{\pi}{4}$时，级数发散；当$|x-k\pi|=\frac{\pi}{4}$时，级数为

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}(\pm 1)^n$，因为

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(3n+1)(3n+2)}{9(n+1)^2}<1,$$

于是$a_n<a_{n+1}$，故$a_n\not\to 0(n\to\infty)$，级数发散. 于是，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}\tan^n x$的收敛域为$\left\{x\,\middle|\,|x-k\pi|<\frac{\pi}{4},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

【2838】 把函数$f(x)=x^3$，按照二项式$x+1$的非负整数幂展开.

解 $f(x)=x^3=[(x+1)-1]^3$

$$=(x+1)^3-3(x+1)^2+3(x+1)-1.$$

【2839】 把函数：

$$f(x)=\frac{1}{a-x}\quad(a\neq 0),$$

展开成幂级数:(1) 按照 x 幂;(2) 按照二项式幂 $x-b$,这里 $b\neq a$;(3) 按照 $\frac{1}{x}$ 幂. 指出相应的收敛域.

解　(1) $f(x)=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{a}}=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^{n+1}}$,

收敛域为 $|x|<|a|$.

(2) $$f(x)=\frac{1}{a-b-(x-b)}$$

$$=\frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-b}{a-b}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n+1}},$$

收敛域为 $|x-b|<|a-b|$.

(3) $$f(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\frac{a}{x}-1}=-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\frac{a}{x}}$$

$$=-\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{x}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{x^{n+1}},$$

收敛域为 $|x|>|a|$.

【2840】　把函数 $f(x)=\ln x$ 按照差 $x-1$ 的非负整数幂展开,并说明展开式的收敛区间.

求出级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

解　$f(x)=\ln(1+(x-1))=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}$,

收敛域为 $|x-1|<1$,即 $0<x<2$. 当 $x-1=1$ 时,级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$,收敛;于是当 $0<x\leqslant 2$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}$ 收敛. 因为 $\ln x$ 在 $x=2$ 处连续,所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2.$$

按照变量x的非负整数幂写出下列函数的展开式并求出相应的收敛区间(2841 ～ 2846).

【2841】 $f(x) = \operatorname{sh}x$.

解 $$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
收敛域为$(-\infty, +\infty)$.

【2842】 $f(x) = \operatorname{ch}x$.

解 $$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$
收敛域为$(-\infty, +\infty)$.

【2843】 $f(x) = \sin^2 x$.

解 $$f(x) = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}\left[1 - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}\right]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!},$$
收敛域为$(-\infty, +\infty)$.

【2844】 $f(x) = a^x \quad (a > 0)$.

解 $$f(x) = e^{x\ln a} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n,$$
由 $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{\ln^n a}{n!}\right|} = |\ln a|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0,$$
所以收敛区间为$(-\infty, +\infty)$.

【2845】 $f(x) = \sin(\mu\arcsin x)$.

解 由
$$\operatorname{arsin}x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$
$$= \int_0^x\left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4 + \cdots\right)dt$$
$$= x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \cdots, (|x| < 1),$$

有

$$f(x)=\mu\arcsin x-\frac{\mu^3}{3!}(\arcsin x)^3+\frac{\mu^5}{5!}(\arcsin x)^5-\cdots$$

$$=\mu x+\frac{\mu(1-\mu^2)}{3!}x^3+\frac{\mu(1-\mu^2)(3^2-\mu^2)}{5!}x^5+\cdots,$$

收敛区间为$(-1,1)$.

【2846】 $f(x)=\cos(\mu\arcsin x)$.

解 $f(x)=1-\frac{\mu^2}{2!}(\arcsin x)^2+\frac{\mu^4}{4!}(\arcsin x)^4-\cdots$

$$=1-\frac{\mu^2}{2!}x^2-\frac{\mu^2(2^2-\mu^2)}{4!}x^4-\cdots,$$

收敛区域为$(-1,1)$.

【2847】 按照差 $x-1$ 的非负整数幂写出函数 $f(x)=x^x$ 展开式的前三项.

解 由 $f(x)=x^x$ 知，$f(1)=1$，又

$$f'(x)=x^x(1+\ln x),f'(1)=1,$$

$$f''(x)=x^x(1+\ln x)^2+x^{x-1},f''(1)=2,$$

$$f'''(x)=x^x(x+\ln x)^3+2x^{x-1}+x^{x-1}\left(\ln x+\frac{x-1}{x}\right),$$

$$f'''(1)=3,$$

有　$$f(x)=1+(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+\cdots,$$

收敛区间为 $|x-1|<1$，即 $0<x<2$.

【2848】 按照变量 x 的非负整数幂写出函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}(x\neq 0)$ 及 $f(0)=\mathrm{e}$ 展开式的前三项.

解 由 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$，$f(0)=\mathrm{e}$，

有　$$f'(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}\right]$$

$$=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[-\frac{1}{x^2}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\right)+\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right]$$

$$=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{1}{1+x}+o(x)\right],(x\neq 0).$$

因为 $\quad f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$,

ξ 介于 0 与 x 之间,有

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}f'(\xi)$$

$$=\lim_{\xi\to0}f'(\xi)=-\frac{e}{2}$$

$$f''(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left\{\left[\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{1}{1+x}+o(x)\right]^2\right.$$

$$\left.+\frac{2}{x^3}\ln(1+x)-\frac{1}{x^2(1+x)}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1+x)^2}\right\}$$

$$=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left\{\left[\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{1}{1+x}+o(x)\right]^2\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3}-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}+o(x)\right\},(x\neq0).$$

同理 $\quad f''(0)=\dfrac{11}{12}e$,

$$f'''(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left\{\left[\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{1}{1+x}+o(x)\right]^3\right.$$

$$+3\left[\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{1}{1+x}+o(x)\right]$$

$$\cdot\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}+o(x)\right]$$

$$+\left[-\frac{6}{x^4}\ln(1+x)+\frac{2}{x^3(1+x)}+\frac{4}{x^3}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{(1+x)^3}\right]\right\},(x\neq0).$$

同理有 $f'''(0)=-\dfrac{21}{8}e$,于是,前三项是 $e\left(1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{11}{24}x^2-\dfrac{7}{16}x^3+\cdots\right)$,收敛区间为$(-1,1)$.

【2849】 把函数 $\sin(x+h)$ 和 $\cos(x+h)$ 按照变量 h 的非负整数幂展开.

解 $\sin(x+h)=\sin x\cosh+\cos x\sin h$

$$= \sin x\left(1-\frac{h^2}{2!}+\frac{h^4}{4!}-\cdots\right)+\cos x\left(h-\frac{h^3}{3!}+\frac{h^5}{5!}-\cdots\right)$$

$$= \sin x + h\cos x - \frac{h^2}{2!}\sin x - \frac{h^3}{3!}\cos x + \cdots,$$

类似地有

$$\cos(x+h) = \cos x - h\sin x - \frac{h^2}{2!}\cos x + \frac{h^3}{3!}\sin x + \cdots,$$

收敛区间皆为$(-\infty,+\infty)$.

【2850】 确定以下函数幂级数的展开式收敛区间：

$$f(x) = \frac{x}{x^2-5x+6}$$

(1) 按照 x 幂;(2) 按照二项式$(x-5)$的幂.

解 (1) 由

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{-2}{x-2}+\frac{3}{x-3}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{1}{1-\frac{x}{3}},$$

又$\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$展式的收敛区间为$(-2,2)$，$\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$展式的收敛区间为$(-3,3)$. 于是我们有 $f(x)$ 按 x 幂展开的收敛区间为$(-2,2)$.

(2) 由

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{3}{(x-5)+2} - \frac{2}{(x-5)+3}$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-5}{2}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-5}{3}}$$

又$\frac{1}{1+\frac{x-5}{2}}$展式的收敛区间为$\{x \mid |x-5|<2\}$，$\frac{1}{1+\frac{x-5}{3}}$展式的收敛区间为$\{x \mid |x-5|<3\}$. 我们有 $f(x)$ 关于 $x-5$ 幂展开的收敛区间为$(3,7)$.

利用基本展开式 Ⅰ－Ⅴ，写出下列函数关于 x 的幂级数的展

开式(2851 ～ 2868).

【2851】 e^{-x^2}.

解 $e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!},(x\in(-\infty,+\infty))$.

【2852】 $\cos^2 x$.

解 $$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n},(|x|<+\infty).$$

【2853】 $\sin^3 x$.

解 $$\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$$

$$=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

$(x\in(-\infty,+\infty))$.

【2854】 $\frac{x^{10}}{1-x}$.

解 $\frac{x^{10}}{1-x}=x^{10}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=10}^{\infty}x^n,(x\in(-1,1))$.

【2855】 $\frac{1}{(1-x)^2}$.

解 $$\frac{1}{(1-x)^2}=(1-x)^{-2}$$

$$=1+(-2)(-x)+\frac{(-2)(-2-1)}{2!}(-x)^2+\cdots$$

$$+\frac{(-2)(-2-1)\cdots(-2-n+1)}{n!}(-x)^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n,x\in(-1,1).$$

【2856】 $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

解 $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}=x(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$

$$=x\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-2x)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(-2x)^3+\cdots\right]$$

$$=x+x^2+\frac{1\cdot 3}{2!}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!}x^4+\cdots$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1},x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时,级数为 $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$,由 2689 题知,该级数收敛.

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时,$\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$ 无定义,于是

$$\frac{x}{\sqrt{1-2x}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1},\ x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

【2857】 $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

解 $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\dfrac{1}{2}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},x\in(-1,1).$$

【2858】 $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$

提示:把已知分式化为最简有理分式.

解 $$\frac{x}{1+x-2x^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+2x}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^nx^n\right]$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}[1-(-2)^n]x^n,x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

【2859】 $\dfrac{12-5x}{6-5x-x^2}$.

解 $$\frac{12-5x}{6-5x-x^2}=\frac{1}{1-x}+\frac{6}{6+x}$$
$$=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+\frac{x}{6}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{6^n}\right]x^n,x\in(-1,1).$$

【2860】 $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

解 $$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$$
$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}$$
$$=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)-\frac{1+(-1)^n}{2}\right]x^n$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[n+\frac{1-(-1)^n}{2}\right]x^n,x\in(-1,1).$$

【2861】 $\dfrac{1}{1-x-x^2}$.

解 $$\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{1}{\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}+\left(x+\frac{1}{2}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{2}{\sqrt{5}-1}\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}-1}x\right)^{-1}+\frac{2}{\sqrt{5}+1}\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}+1}x\right)^{-1}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{n+1}+(-1)^n\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^{n+1}\right]x^n$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}+(-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}\right]x^n,$$

$$x\in\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

【2862】 $\frac{1}{1+x+x^2}$.

解 $$\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1}{i\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{x+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{i\sqrt{3}}\left[\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x\right)^{-1}\right.$$

$$\left.-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x\right)^{-1}\right]$$

$$=\frac{1}{i\sqrt{3}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}x^n\right.$$

$$\left.-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}x^n\right]$$

$$=\frac{1}{i\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\right]x^n,$$

由于

$$(-1)^n\left[\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$=(-1)^n\left[\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}\right.$$

$$\left.-\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$=(-1)^n\left[\left(\cos\frac{n+1}{3}\pi+i\sin\frac{n+1}{3}\pi\right)\right.$$

$$-\left(\cos\frac{n+1}{3}\pi-i\sin\frac{n+1}{3}\pi\right)\Big]$$

$$=(-1)^n 2i\sin\frac{n+1}{3}\pi$$

$$=2i(-1)^n\sin\left[(n+1)\pi-\frac{2(n+1)}{3}\pi\right]$$

$$=2i\cdot(-1)^n\left[-\cos(n+1)\pi\sin\frac{2(n+1)}{3}\pi\right]$$

$$=2i\cdot(-1)^n\cdot(-1)\cdot(-1)^{n+1}\sin\frac{2(n+1)}{3}\pi$$

$$=2i\sin\frac{2(n+1)}{3}\pi,$$

于是

$$\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sin\frac{2(n+1)}{3}\pi,$$

$$|x|<\min\left(\frac{2}{|1+i\sqrt{3}|},\frac{2}{|1-i\sqrt{3}|}\right)=1.$$

【2862.1】 $f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}$, $f^{1000}(0)$ 等于多少?

解 $$f(x)=\frac{1}{1+x+x^2+x^3}$$

$$=\frac{1-x}{1-x^4}=\frac{1}{1-x^4}-\frac{x}{1-x^4}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}-x\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}-\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n+1}$$

$$=1-x+x^4-x^5+x^8-x^9+x^{12}-x^{13}+\cdots,$$

$$x\in(-1,1).$$

$$f^{1000}(0)=1.$$

【2863】 $\dfrac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

解 $$\frac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$$

$$=-1-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{x-(\cos\alpha+i\sin\alpha)}+\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{x-(\cos\alpha-i\sin\alpha)}\right]$$

$$=-1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x(\cos\alpha-i\sin\alpha)}+\frac{1}{1-x(\cos\alpha+i\sin\alpha)}\right]$$

$$=-1+\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}x^n(\cos n\alpha-i\sin n\alpha+\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos n\alpha,$$

其中 $$|x|<\min\left(\frac{1}{|\cos\alpha+i\sin\alpha|},\frac{1}{|\cos\alpha-i\sin\alpha|}\right)=1$$

【2864】 $\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

解 $$\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$$

$$=\frac{ix}{2}\left[\frac{1}{x-(\cos\alpha-i\sin\alpha)}-\frac{1}{x-(\cos\alpha+i\sin\alpha)}\right]$$

$$=\frac{ix}{2}\left[-\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{1-x(\cos\alpha+i\sin\alpha)}+\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{1-x(\cos\alpha-i\sin\alpha)}\right]$$

$$=\frac{ix}{2}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos\alpha-i\sin\alpha)^{n+1}\right]$$

$$=\frac{ix}{2}\sum_{n=0}^{\infty}x^n[-\cos(n+1)\alpha-i\sin(n+1)\alpha$$
$$+\cos(n+1)\alpha-i\sin(n+1)\alpha]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\sin(n+1)\alpha$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sin n\alpha,\text{其中 } x\in(-1,1).$$

【2865】 $\frac{x\operatorname{sh}\alpha}{1-2x\operatorname{ch}\alpha+x^2}$.

解 $$\frac{x\operatorname{sh}\alpha}{1-2x\operatorname{ch}\alpha+x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{ch}\alpha+\operatorname{sh}\alpha}{x-(\operatorname{ch}\alpha+\operatorname{sh}\alpha)}-\frac{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{sh}\alpha}{x-(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{sh}\alpha)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{\alpha}}{x-e^{\alpha}} - \frac{e^{-\alpha}}{x-e^{-\alpha}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-xe^{\alpha}} - \frac{1}{1-xe^{-\alpha}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{n\alpha} - \sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{-n\alpha}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \operatorname{sh} n\alpha,$$

其中 $\quad |x| < \min(e^{-\alpha}, e^{\alpha}) = e^{-|\alpha|}.$

【2866】 $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

解 $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{3}{2}-n+1\right)}{n!}(-x^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^{2n}, x \in (-1,1).$$

【2867】 $\ln(1+x+x^2+x^3).$

解 $\ln(1+x+x^2+x^3)$

$$= \ln[(1+x)(1+x^2)]$$

$$= \ln(1+x) + \ln(1+x^2),$$

又 $\quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}, x \in (-1,1],$

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}, x \in [-1,1],$$

于是，当 $-1 < x \leqslant 1$ 时，有

$$\ln(1+x+x^2+x^3)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{x^m}{m} + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]-1}(1+(-1)^m)\frac{x^m}{m}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}+(-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]-1}(1+(-1)^m)}{m}x^m.$$

【2868】 $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$.

解 由

$$e^{x\cos\alpha+ix\sin\alpha}=e^{x(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=e^{xe^{i\alpha}},$$

知 $e^{xe^{i\alpha}}$ 的实部为 $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$. 而

$$e^{xe^{i\alpha}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(xe^{i\alpha})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}e^{in\alpha}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(\cos n\alpha+i\sin n\alpha),$$

比较上式两端的实部有

$$e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n!}x^n, x\in(-\infty,+\infty).$$

首先展开导函数,用分项积分法求得下列函数的幂级数展开式(2869 ~ 2872).

【2869】 $f(x)=\arctan x$,求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ 的和.

解 $\arctan x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)dt$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

收敛半径 $R=1$,当 $|x|=1$ 时,该级数为交错级数且满足莱布尼兹判别法,所以级数的收敛域为 $[-1,1]$,令 $x=1$ 有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

注:上述级数的逐项积分条件是满足的,事实上,当 $|x|<1$, $t\in[0,x]$ 时,$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$ 是一致收敛的,又各项皆连续. 以下各题类似,不再逐一说明.

【2870】 $f(x)=\arcsin x$.

解 $$\arcsin x=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=\int_0^x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right)\mathrm{d}t$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

易知上述级数收敛半径为$R=1$,当$|x|=1$时,由2604题知级数收敛.于是

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x\in[-1,1].$$

【2871】 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 $$\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$=\int_0^x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right]\mathrm{d}t$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

级数收敛半径为$R=1$.当$|x|=1$时,由2870知,级数绝对收敛.因此

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x\in[-1,1].$$

【2872】 $f(x)=\ln(1-2x\cos\alpha+x^2)$.

解 $$\ln(1-2x\cos\alpha+x^2)$$

$$=\int_0^x\frac{2t-2\cos\alpha}{1-2t\cos\alpha+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=-2\int_0^x\frac{1}{t}\cdot\frac{t\cos\alpha-t^2}{1-2t\cos t+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=-2\int_0^x\left(\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}t^n\cos n\alpha\right)dt \qquad \text{(2863 题的结论)}$$

$$=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n}x^n,$$

该级数的收敛半径为 $R=1$，当 $|x|=1$ 时，由 2698 题知，当 $0<\alpha<\pi$ 时，该级数收敛. 于是，当 $\alpha\in(0,\pi)$ 时，级数的收敛区间为 $[-1,1]$. 又当 $\alpha=0,x=1$ 时，级数发散；当 $\alpha=0,x=-1$ 时，级数条件收敛；当 $x=\pi,x=1$ 时，级数条件收敛；当 $\alpha=\pi,x=-1$ 时，级数发散.

【2873】 运用各种方法，求出下列函数的幂级数展开式：

(1) $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$；

(2) $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x$；

(3) $f(x)=\text{artan}\,\frac{2-2x}{1+4x}$；

(4) $f(x)=\arctan\frac{2x}{2-x^2}$；

(5) $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$；

(6) $f(x)=\arccos(1-2x^2)$；

(7) $f(x)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$；

(8) $f(x)=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$.

解 (1) $f(x)$

$$=(1+x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)},(x\in(-1,1)).$$

当 $|x|=1$ 时，该级数是交错级数且满足莱布尼兹条件，级数收敛. 所以，级数的收敛域为 $x\in[-1,1]$.

(2) 由 2857 题和 2869 题结论知

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1},\qquad (x\in(-1,1)).$$

(3) $f'(x)=\left(\arctan\frac{2-2x}{1+4x}\right)'=-\frac{2}{1+4x^2}$,

于是有 $\arctan\frac{2-2x}{1+4x}$

$$=-2\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+4t^2}+\arctan 2$$

$$=\arctan 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{2n-1}x^{2n-1},x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

当 $|x|=\frac{1}{2}$ 时，此时级数为交错级数，且满足莱布尼兹判别法条件，级数收敛，收敛域为 $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

(4) 由 $f'(x)=\left(\arctan\frac{2x}{2-x^2}\right)'=\frac{4+2x^2}{4+x^4}$,

有 $$\arctan\frac{2x}{2-x^2}=\int_0^x\frac{4+2t^2}{4+t^4}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^x\left[\left(1+\frac{t^2}{2}\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t^4}{4}\right)^n\right]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{t^{2n}}{2^n}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)},x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

当 $|x|=\sqrt{2}$ 时，级数为

$$\pm\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{2n+1},\qquad ①$$

它们皆由两收敛级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{4n+1},$$

和 $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{4n+3},$$

逐项相加后分别乘以$\sqrt{2}$和$-\sqrt{2}$得到，故级数①收敛，因此，原级数的收敛域为$x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

(5) 由2869题结论有

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)},\qquad x\in(-1,1).
\end{aligned}
$$

当$|x|=1$时，此时级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n-1)}$，收敛，于是，级数的收敛域为$x\in[-1,1]$.

(6) 由

$$f'(x)=[\arccos(1-2x^2)]'=\frac{2\operatorname{sgn}x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$f(0)=0,$$

有

$$
\begin{aligned}
&\arccos(1-2x^2)\\
&=2\operatorname{sgn}x\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\\
&=2\operatorname{sgn}x\cdot\int_0^x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right]dt\\
&=2\operatorname{sgn}x\cdot\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]\\
&=2|x|\cdot\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n}}{2n+1}\right],\\
&\qquad x\in(-1,1). \qquad ①
\end{aligned}
$$

当$|x|=1$时，此时级数为

$$2\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}\right],$$

而级数 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1},$$

由拉阿比判别法

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+5n}{(2n+1)^2}=\frac{3}{2}>1,$$

知收敛. 因此，级数 ① 的收敛域为 $x\in[-1,1]$.

(7) 由 2870 题知

$$f(x)=x\cdot\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]$$

$$+\left[1-\frac{x^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}x^{2n+2}\right]$$

$$=1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{x^{2n+2}}{2n+1}, x\in(-1,1).$$

当 $|x|=1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}, \qquad ①$$

由拉阿贝判别法

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{10n^2+11n}{(2n+1)^2}=\frac{5}{2}>1,$$

知级数 ① 收敛，于是原级数的收敛域为 $x\in[-1,1]$.

(8) 由 2871 题结论知

$$f(x)=x\cdot\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]$$

$$-\left[1+\frac{1}{2}x^2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}x^{2n+2}\right]$$

$$=-1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{x^{2n+2}}{2n+1},$$

$$x\in(-1,1).$$

【2874】 利用展开式

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots.$$

的唯一性，求出下列函数的 n 阶导数：

(1) $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$；

(2) $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{a}{x}}$；

(3) $f(x)=\arctan x$.

解 (1) $f(x+h)-f(x)$

$$=\mathrm{e}^{(x+h)^2}-\mathrm{e}^{x^2}=\mathrm{e}^{x^2}(\mathrm{e}^{2xh+h^2}-1)$$

$$=\mathrm{e}^{x^2}\Big[(2xh+h^2)+\frac{1}{2!}(2xh+h^2)^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}(2xh+h^2)^n+\cdots\Big],$$

其中 h^n 的系数为

$$\mathrm{e}^{x^2}\Big[\frac{1}{n!}(2x)^n+\frac{1}{(n-1)!}C_{n-1}^1(2x)^{n-2}+\frac{1}{(n-2)!}C_{n-2}^2(2x)^{n-4}+\cdots\Big]$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{n!}\Big[(2x)^n+\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}+\cdots\Big],$$

将 $f(x+h)-f(x)$ 的展式中 h^n 的系数 $\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$ 与上式比较有

$$(\mathrm{e}^{x^2})^{(n)}=\mathrm{e}^{x^2}\Big[(2x)^n+\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}+\cdots\Big].$$

(2) $f(x+h)-f(x)=\mathrm{e}^{\frac{a}{x+h}}-\mathrm{e}^{\frac{a}{x}}$

$$=\mathrm{e}^{\frac{a}{x}}(\mathrm{e}^{-\frac{ah}{x(x+h)}}-1)=\mathrm{e}^{\frac{a}{x}}(\mathrm{e}^{\frac{-a\frac{h}{x^2}}{1+\frac{h}{x}}}-1)$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{a}{x}}(\mathrm{e}^{-\frac{ah}{x^2}+\frac{ah^2}{x^3}-\frac{ah^3}{x^4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{ah^{n+1}}{x^{n+2}}+\cdots}-1)$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{a}{x}}\Big\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{ah^{n+1}}{x^{n+2}}\Big]^m\Big\}$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{a}{x}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^m}{m!x^m}\sum_{k_1=0}^{\infty}(-1)^{k_1+1}\Big(\frac{h}{x}\Big)^{k_1+1}$$

$$\sum_{k_2=0}^{\infty}(-1)^{k_2+1}\left(\frac{h}{x}\right)^{k_2+1}\cdots\sum_{k_m=0}^{\infty}(-1)^{k_m+1}\left(\frac{h}{x}\right)^{k_m+1}$$

$$=e^{\frac{a}{x}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^m}{m!x^m}\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k_1+\cdots k_m=s}(-1)^{k_1+\cdots+k_m+m}\cdot\left(\frac{h}{x}\right)^{k_1+k_2+\cdots k_m+m}$$

$$=e^{\frac{a}{x}}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^m a^m}{m!x^m}\left(\frac{h}{x}\right)^m\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1+\cdots+k_m=s}1\right)(-1)^s\left(\frac{h}{x}\right)^s\right]$$

$$=e^{\frac{a}{x}}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^m a^m}{m!x^m}\left(\frac{h}{x}\right)^m\cdot\sum_{s=0}^{\infty}C_{s+m-1}^{s}(-1)^s\left(\frac{h}{x}\right)^s\right]\quad①$$

$$=e^{\frac{a}{x}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+s}a^m}{m!x^m}\left(\frac{h}{x}\right)^{m+s}C_{s+m-1}^{s}$$

$$=e^{\frac{a}{x}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{s+m=n\\ s\geqslant 0,m\geqslant 1}}\frac{(-1)^n a^m}{m!x^m}\left(\frac{h}{x}\right)^n C_{n-1}^{s}$$

$$=e^{\frac{a}{x}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^n}\left(\frac{h}{x}\right)^n\sum_{\substack{s+m=n\\ s\geqslant 0,m\geqslant 1}}C_{n-1}^{s}x^{n-m}\frac{a^m}{m!}$$

$$=e^{\frac{a}{x}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^{2n}}h^n\sum_{s=0}^{n-1}C_{n-1}^{s}\frac{x^s a^{n-s}}{(n-s)!}$$

$$=e^{\frac{a}{x}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}A_n h^n$$

其中 $$A_n=\frac{(-1)^n}{x^{2n}}\sum_{s=0}^{n-1}s!C_n^sC_{n-1}^{s}a^{n-s}x^s,$$

于是,比较 h^n 的系数有

$$(e^{\frac{a}{x}})^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{2n}}e^{\frac{a}{x}}\sum_{s=0}^{n-1}s!C_n^sC_{n-1}^{s}a^{n-s}x^s$$

$$=\frac{(-1)^n}{x^{2n}}e^{\frac{a}{x}}\left[a^n+\frac{n(n-1)}{1!}a^{n-1}x\right.$$

$$+\frac{n(n-1)(n-1)(n-2)}{2!}a^{n-2}x^2$$

$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)\cdot(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}a^{n-3}x^3+\cdots\right].$$

注:(1) 式 $\sum\limits_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s\\ k_1\geqslant 0,\cdots,k_m\geqslant 0}}1=C_{s+m-1}^{s}$ 证明如下:

令 $|t|<1$，由 $\frac{1}{1-t}=\sum_{k=0}^{\infty}t^k$ 有

$$\left(\frac{1}{1-t}\right)^m=\sum_{k_1=0}^{\infty}t^{k_1}\sum_{k_2=0}^{\infty}t^{k_2}\cdots\sum_{k_m=0}^{\infty}t^{k_m}$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k_1+\cdots+k_m=s}t^{k_1+k_2+\cdots+k_m}$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\Big(\sum_{k_1+\cdots+k_m=s}1\Big)t^s=\sum_{s=0}^{\infty}P_st^s,$$

其中 $$P_s=\sum_{k_1+\cdots+k_m=s}1.$$

又 $$\left(\frac{1}{1-t}\right)^m=(1-t)^{-m}$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-s+1)}{s!}(-1)^st^s$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{2s}\frac{m(m+1)\cdots(m+s-1)}{s!}t^s$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}C_{m+s-1}^{s}t^s,$$

由幂级数展开式的惟一性有 $P_s=C_{m+s-1}^{s}$.

(3) 由 $\arctan x+\arctan y=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$,

令 $$y=\frac{\frac{h}{1+x^2}}{1+\frac{x}{1+x^2}h},$$

有 $$\frac{x+y}{1-xy}=x+h,$$

于是 $$f(x+h)-f(x)=\arctan(x+h)-\arctan x$$

$$=\arctan\frac{x+y}{1-xy}-\arctan x=\arctan y$$

$$=\arctan\left(\frac{h}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{1+x^2}h}\right),$$

由 2869 题知，当 $y\in[-1,1]$，有

$$\arctan y=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{y^{2m+1}}{2m+1},$$

当 h 很小(且 $|x|\leqslant 1$) 时，有

$$y=\frac{h}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{1+x^2}h}$$

$$=\frac{h}{1+x^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x}{1+x^2}h\right)^k,$$

于是 $f(x+h)-f(x)$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{2m+1}\left[\frac{h}{1+x^2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x}{1+x^2}h\right)^k\right]^m$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{2m+1}\left(\frac{h}{1+x^2}\right)^m\cdot$$

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_m=0}^{\infty}(-1)^{k_1+k_2+\cdots k_m}\cdot\left(\frac{xh}{1+x^2}\right)^{k_1+k_2+\cdots k_m}$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{2m+1}\left(\frac{h}{1+x^2}\right)^m\cdot$$

$$\sum_{s=0}^{\infty}\Big(\sum_{k_1+\cdots+k_m=s}1\Big)(-1)^s\left(\frac{xh}{1+x^2}\right)^s$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{2m+1}\left(\frac{h}{1+x^2}\right)^{m+s}x^s\cdot(-1)^sC_{m+s-1}^s$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{m+s=n\\ m\geqslant1,s\geqslant0}}(-1)^{m+s}\left(\frac{h}{1+x^2}\right)^{m+s}\cdot\frac{x^s}{2m+1}C_{m+s-1}^s$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{h}{1+x^2}\right)^nA_n,$$

其中

$$A_n=\sum_{\substack{m+s=n\\ m\geqslant1,s\geqslant0}}\frac{x^s}{2m+1}C_{n-1}^s$$

$$=\sum_{s=0}^{n-1}\frac{x^s}{2(n-s)+1}C_{n-1}^s,(n=1,2,\cdots).$$

比较 h^n 的系数，有

$$(\arctan x)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n} A_n$$

$$= (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{x^s}{2(n-s)+1} C_{n-1}^s$$

$$= (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n} \left[\frac{1}{3} x^{n-1} + \frac{1}{5}(n-1)x^{n-2} + \cdots \right].$$

【2875】 把函数 $f(x) = \ln \frac{1}{2+2x+x^2}$ 按照二项式 $x+1$ 的正整数幂展开.

解 $f(x) = -\ln(1+(1+x)^2)$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} (1+x)^{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{2n}}{n},$$

收敛域为 $x \in [-2, 0]$.

【2876】 把函数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 按照变量 x 的负整数幂展开成幂级数.

解 $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} = -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}, \ |x| > 1.$$

【2877】 把函数 $f(x) = \ln x$ 按照分数 $\frac{x-1}{x+1}$ 的正整数幂展开成幂级数.

解 $f(x) = \ln \frac{1+\frac{x-1}{x+1}}{1-\frac{x-1}{x+1}}$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2n+1}, x > 0.$$

（2857 题结论）.

【2878】 把函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ 按照分数 $\dfrac{x}{1+x}$ 的正整数幂展开成幂级数.

解 $$f(x)=\frac{x}{1+x}\sqrt{1+x}$$
$$=\frac{x}{1+x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{x+1}}}$$
$$=\frac{x}{1+x}\left(1-\frac{x}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{x}{1+x}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n}\right]$$
$$=\frac{x}{1+x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1}.$$
当 $x>-\dfrac{1}{2}$ 时,有 $\left|\dfrac{x}{1+x}\right|<1$,级数收敛;当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时,由 2689 题结论知,级数条件收敛. 因此,此级数的收敛域为 $x\geqslant-\dfrac{1}{2}$.

【2879】 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$,直接证明 $f(x)f(y)=f(x+y)$.

证 $$f(x)f(y)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{x^s}{s!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$
$$=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{s!k!}x^sy^k=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s+k=n}\frac{1}{s!k!}x^sy^k$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{s+k=n}\frac{n!}{s!k!}x^sy^k\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{s=0}^{\infty}C_n^sx^sy^{n-s}\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot(x+y)^n=f(x+y).$$
由于上述级数在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 及 $y\in(-\infty,+\infty)$ 上绝对收敛,于是级数重新组合是合理的.

【2880】 如果定义:
$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

及 $$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

证明：(1) $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$； (2) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

证 因为 $\sin x,\cos x$ 的幂级数展开在 $(-\infty,+\infty)$ 内绝对收敛，于是级数相乘、相加、减后形成的级数皆绝对收敛，且可重新组合.

(1) $\sin x\cos x$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!}\cdot\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{x^{2s}}{(2s)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{l+s=n\\ l\geqslant 0,s\geqslant 0}}(-1)^{l+s}\cdot\frac{x^{2l+2s+1}}{(2l+1)!(2s)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n x^{2n+1}\cdot\sum_{\substack{l+s=n\\ l\geqslant 0,s\geqslant 0}}\frac{1}{(2l+1)!(2s)!}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n A_n x^{2n+1},$$

其中 $$A_n=\sum_{\substack{l+s=n\\ l\geqslant 0,s\geqslant 0}}\frac{1}{(2l+1)!(2s)!}$$

$$=\sum_{\substack{2l+1+2s=2n+1\\ l\geqslant 0,s\geqslant 0}}\frac{1}{(2l+1)!(2s)!}$$

$$=\frac{1}{(2n+1)!}\sum_{\substack{k_1+k_2=2n+1\\ k_1\text{—奇数}\\ k_2\text{—偶数}}}\frac{(2n+1)!}{(k_1)!(k_2)!}$$

$$=\frac{1}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{2}\Big(\sum_{k_1\text{奇},k_2\text{偶}}+\sum_{k_1\text{偶},k_2\text{奇}}\Big)$$

$$=\frac{1}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2n+1)!}2^{2n+1}.$$

于是 $$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

(2) $\sin^2 x+\cos^2 x$

$$=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}(-1)^{n_1+n_2}\frac{x^{2(n_1+n_2)+2}}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!}$$

$$+\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}(-1)^{k_1+k_2}\frac{x^{2(k_1+k_2)}}{(2k_1)!(2k_2)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n x^{2n+2}\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geqslant 0,n_2\geqslant 0}}\frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!}\right]$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\left[(-1)^m x^{2m}\sum_{\substack{k_1+k_2=m\\ k_1\geqslant 0,k_2\geqslant 0}}\frac{1}{(2k_1)!(2k_2)!}\right]$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}+\sum_{n=0}^{\infty}$$

$$=1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n+2}A_n,$$

其中 $$A_n=\sum_{\substack{k_1+k_2=n+1\\ k_1\geqslant 0,k_2\geqslant 0}}\frac{1}{(2k_1)!(2k_2)!}$$

$$-\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geqslant 0,n_2\geqslant 0}}\frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!}$$

$$=\frac{1}{(2n+2)!}\left[\sum_{\substack{2k_1+2k_2=2n+2\\ k_1\geqslant 0,k_2\geqslant 0}}\frac{(2n+2)!}{(2k_1)!(2k_2)!}\right.$$

$$\left.-\sum_{\substack{(2n_1+1)+(2n_2+1)=2n+2\\ n_1\geqslant 0,n_2\geqslant 0}}\frac{(2n+2)!}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!}\right]$$

$$=\frac{1}{(2n+2)!}\left[\sum_{k'=0,1,\cdots,2n+2}C_{2n+2}^{k'}-\sum_{l'=1,3,\cdots,2n+1}C_{2n+2}^{l'}\right]$$

$$=\frac{1}{(2n+2)!}\left[\sum_{s=0,2,\cdots,2n+2}(-1)^s C_{2n+2}^{s}\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1,3,\cdots,2n+1}(-1)^s C_{2n+2}^{s}\right]$$

$$=\frac{1}{(2n+2)!}\sum_{s=0}^{2n+2}(-1)^s C_{2n+2}^{s}$$

$$= \frac{1}{(2n+2)!}(1+(-1))^{2n+2}$$

$$= 0, (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

于是 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, x \in (-\infty, +\infty)$.

【2881】 写出函数 $f(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n+1}\right)\right]^{-1}$ 幂级数展开式中的若干项.

解 $f(x) = \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \cdots\right)^{-1}$

$$= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \cdots\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \cdots\right)^2$$

$$- \left(\frac{x}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots\right)^3 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{24} - \cdots, x \in (-1, 1).$$

对函数的幂级数进行相应的运算，求出下列函数幂级数的展开式(2882 ～ 2890).

【2882】 $f(x) = (1+x)e^{-x}$.

解 $f(x) = (1+x)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n!}$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right]x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n!}x^n, x \in (-\infty, +\infty).$$

【2883】 $f(x) = (1-x)^2 \operatorname{ch}\sqrt{x}$.

解 当 $x \geqslant 0$ 时,

$$\operatorname{ch}\sqrt{x} = \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{n!} + \frac{(-1)^n}{n!}\right]x^{\frac{n}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}.$$

当 $x < 0$ 时

$$\operatorname{ch}\sqrt{x} = \cos\sqrt{|x|},$$

于是 $$\operatorname{ch}\sqrt{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\sqrt{|x|})^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!},$$

由此 $$\operatorname{ch}\sqrt{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!},x\in(-\infty,+\infty).$$

进而 $$\begin{aligned}f(x)&=(1-2x+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}\\&=1-\frac{3}{2}x+\sum_{n=2}^{\infty}\Big[\frac{1}{(2n)!}-\frac{2}{(2n-2)!}\\&\quad+\frac{1}{(2n-4)!}\Big]x^n,x\in(-\infty,+\infty).\end{aligned}$$

【2884】 $f(x)=\ln^2(1-x)$.

解 $$\begin{aligned}f(x)&=\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\right)^2\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{1\cdot n}+\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{3(n-2)}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 1}\Big]x^{n+1}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1}\right)\frac{1}{n+1}+\cdots\\&\quad+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{1}\right)\frac{1}{n+1}\Big]x^{n+1}\\&=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1},\ x\in(-1,1).\end{aligned}$$

当 $x=-1$ 时,级数为

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{(-1)^{n+1}}{n+1},$$

由 $$\begin{aligned}&\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}\\&>\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{n+2},n=2,3,\cdots,\end{aligned}$$

且 $$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}=\frac{c+\ln n+\varepsilon_n}{n+1}\to 0,(n\to\infty).$$

知级数收敛,当 $x=1$ 时,由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c}{n+1}$ 发散,且原级数为正项级数,

知 $2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}$ 也发散.

于是,级数 $2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$ 的收敛域为 $x\in[-1,1]$.

【2885】 $f(x)=(1+x^2)\arctan x$.

解 由 2869 题知

$$f(x)=(1+x^2)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)x^{2n+1}$$

$$=x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1},x\in[-1,1].$$

【2886】 $f(x)=e^x\cos x$.

解 $e^x\cos x$ 为 $e^x(\cos x+i\sin x)$ 的实部. 又

$$e^x(\cos x+i\sin x)=e^x\cdot e^{ix}=e^{(1+i)x}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[(1+i)x]^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(1+i)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

比较上式两端的实部,有

$$e^x\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n,x\in(-\infty,+\infty).$$

【2887】 $f(x)=e^x\sin x$.

解 由 2886 题知

$$e^x\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n,x\in(-\infty,+\infty).$$

【2888】 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

解 $$f(x)=\sum_{n_1=0}^{\infty}(-1)^{n_1}x^{n_1}\cdot\sum_{n_2=0}^{\infty}(-1)^{n_2}\frac{x^{n_2+1}}{n_2+1}$$
$$=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}(-1)^{n_1+n_2}\frac{x^{n_1+n_2+1}}{n_2+1}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n x^{n+1}\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geqslant 0,n_2\geqslant 0}}\frac{1}{n_2+1}\right]$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n\right],$$
$$x\in(-1,1).$$

当 $|x|=1$ 时,通项的绝对值 $\geqslant 1$,级数发散,于是,级数的收敛域为 $x\in(-1,1)$.

【2889】 $f(x)=(\arctan x)^2$.

解 $$f(x)=\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\right)^2\qquad(\text{由 2869 题结论知})$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{(2n-1)\cdot 1}+\frac{1}{(2n-3)\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot(2n-1)}\right]x^{2n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{1}\right)\frac{1}{2n}+\left(\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2n}+\cdots+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2n-1}\right)\frac{1}{2n}\right]x^{2n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)\frac{x^n}{n},$$
$$x\in(-1,1).$$

【2890】 $f(x)=\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^2$.

解 令
$$\varphi(x)=(\arcsin x)^2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,x\in(-1,1).$$

则 $$\varphi'(x)=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n,x\in(-1,1).$$

由 $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$,

有 $a_0=a_1=0$.

又由 $\sqrt{1-x^2}\varphi'(x)=2\arcsin x$,

有 $$\sqrt{1-x^2}\varphi''(x)-\frac{x\varphi'(x)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}},x\in(-1,1).$$

即 $(1-x^2)\varphi''(x)-x\varphi'(x)=2,x\in(-1,1)$.

将 $\varphi(x)$ 的展开式代入,且 $a_0=a_1=0$,有

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^n=2,$$

也就是 $$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}n^2a_nx^n=2.$$

于是 $$2a_2+6a_3x+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-n^2a_n]x^n=2,$$
$$x\in(-1,1).$$

比较上式 x 的同次幂的系数有

$$a_2=1,a_3=0,$$
$$a_{n+2}=\frac{n^2}{(n+2)(n+1)}a_n,n\geqslant 2.$$

于是可得 $a_{2k+1}=0$,

$$a_{2k+2}=\frac{2[(2k)!!]^2}{(2k+2)!}=\frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!},k=0,1,2,\cdots.$$

由此有 $$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!}x^{2k+2},x\in(-1,1).$$

于是 $$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!}x^{2k},x\in(-1,1).$$

又该级数当 $x=\pm1$ 时,皆收敛,左端函数在 $x=\pm1$ 处连续,于是上述展开当 $x=1$ 及 $x=-1$ 时也成立.

根据函数变量 x 的正整数幂写出幂级数展开式(非零)的前三项:

【2891】 $f(x)=\tan x$.

解 由泰勒公式,有

$$f(x)=\tan x, f(0)=0,$$
$$f'(x)=\sec x, f'(0)=1,$$
$$f''(x)=2\sec^2 x\tan x, f''(0)=1,$$
$$f'''(x)=2\sec^4 x+4\sec^2 x\tan^2 x, f'''(0)=2,$$
$$f^{(4)}(x)=8\sec^4 x\tan x+8\sec^2 x\tan^3 x+8\sec^4 x\tan x,$$
$$f^{(4)}(0)=0,$$
$$f^{(5)}(x)=32\sec^4 x\tan^2 x+8\sec^6 x+16\sec^2 x\tan^4 x$$
$$+24\sec^4 x\tan^2 x+32\sec^4 x\tan^2 x+8\sec^6 x,$$
$$f^{(5)}(x)=16,\cdots$$

于是
$$f(x)=x+\frac{2}{3!}x^3+\frac{16}{5!}x^5+\cdots$$
$$=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

【2892】 $f(x)=\text{th}x$.

解 由幂级数展式的惟一性知,为求展开式可考虑在 $x=0$ 点附近作幂级数展开,当 $|x|$ 很小,且幂级数中常数项为零时,其收敛的和是很小的,于是有

$$f(x)=\frac{\text{sh}x}{\text{ch}x}=\frac{x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots}{1+\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)}$$
$$=\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)\cdot$$
$$\left[1-\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)+\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2-\cdots\right]$$
$$=\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{5x^4}{24}+\cdots\right)$$
$$=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

参见 Bromwich 著《An Introduction to the Theory of Infinite Series》第十一章.

【2893】 $f(x)=\cot x-\frac{1}{x}$.

解 与2892类似,考虑 $x\neq 0$ 且 $|x|$ 很小的情形,于是有

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots}{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots}-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{x}\left\{\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)\cdot\left[1+\left(\frac{x^2}{3!}-\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}-\cdots\right)+\left(\frac{x^2}{3!}-\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}-\cdots\right)^2+\cdots\right]-1\right\}$$

$$=\frac{1}{x}\left\{\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)\cdot\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{7}{360}x^4+\frac{31}{15120}x^6+\cdots\right)-1\right\}$$

$$=\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{45}x^4-\frac{2}{945}x^6-\cdots\right)$$

$$=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{45}x^3-\frac{2}{945}x^5-\cdots,0<|x|<\pi.$$

【2894】 设 $\sec x$ 的展开式为:

$$\sec x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{(2n)!}x^{2n}.$$

推导关于系数 E_n(欧拉数)的递推关系.

解 由 $\sec x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{(2n)!}x^{2n}$,

有
$$1=\cos x\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\frac{E_s}{(2s)!}x^{2s}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k}}{(2k)!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{E_s}{(2s)!}x^{2s}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s+k=n}(-1)^k x^{2(k+s)}\frac{E_s}{(2k)!(2s)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{s+k=n}(-1)^k \frac{E_s}{(2k)!(2s)!}\right]x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{2n}.$$

由幂级数展式的惟一性,有

$$A_0 = E_0 = 1,$$

又 $A_n = 0,(n = 1,2,\cdots),$

其中 $A_n = \sum_{k+s=n}(-1)^k \frac{E_s}{(2k)!(2s)!}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!}.$$

由此递推关系是

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!} = 0, n = 1,2,\cdots.$$

如已知 E_0,由上式令 $n=1$,得 $E_1 - E_0 = 0$,从而 $E_1 = E_0 = 1$,由 E_0, E_1,令 $n=2$,又可推得 $E_2,\cdots$,如此等等.

【2895】 把函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}$ $(|x|<1)$. 展开成幂级数

解 若 $x^2 + 2|tx| < 1$,则函数 $f(x)$ 就有展开的可能性,令 x^n 的系数为 $P_n(t)$,则

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}$$

$$= 1 + P_1(t)x + P_2(t)x^2 + \cdots + P_n(t)x^n + \cdots. \qquad ①$$

下面确定 $P_n(t)$,为此,对 ① 式两端同时对 x 求导数,有

$$\frac{t-x}{(1-2tx+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= P_1(t) + 2P_2(t)x + \cdots + nP_n(t)x^{n-1} + \cdots.$$

把上式与 ① 式比较,易得

$$(1-2tx+x^2)(P_1 + 2P_2x + \cdots + nP_nx^{n-1})$$

$$= (t-x)(1 + P_1x + P_2x^2 + \cdots + P_nx^n).$$

比较上式两端 x 的同次幂的系数，有

$$P_1(t)=t,$$
$$2P_2(t)-2tP_1(t)=tP_1(t)-1,$$
$$\cdots$$
$$(n+1)P_{n+1}(t)-2ntP_n(t)+(n-1)P_{n-1}(t)$$
$$=tP_n(t)-P_{n-1}(t).$$

由此有

$$P_1(t)=t,\qquad P_2(t)=\frac{3t^2-1}{2},\qquad \cdots$$

$$P_{n+1}(t)=\frac{2n+1}{n+1}tP_n(t)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(t). \qquad ②$$

如 $n=2$，则由 $P_1(t)$ 和 $P_2(t)$ 可得

$$P_3(t)=\frac{5}{3}t\cdot\frac{3t^2-1}{2}-\frac{2}{3}t=\frac{5\cdot 3}{3\cdot 2}t^3-\frac{3}{2}t$$
$$=\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!}\left[t^3-\frac{3\cdot 2}{2(2\cdot 3-1)}t\right].$$

由数学归纳法，利用 ② 式有

$$P_n(t)=\frac{(2n-1)!!}{n!}\left[t^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}t^{n-2}\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}t^{n-4}-\cdots\right],$$

($n\geqslant 1$，勒让德多项式).

【2896】 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^x$，写出函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{1-x}$ 的展开式.

解 $$F(x)=\sum_{n_1=0}^{\infty}a_{n_1}x^{n_1}\sum_{n_2=0}^{\infty}x^{n_2}=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geqslant 0,n_2\geqslant 0}}a_{n_1}\Big)x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Big)x^n,\ x\in(-1,1).$$

【2897】 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 具有收敛半径 R_1，而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的

收敛半径为 R_2，则级数(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$；(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nb_nx^n$ 具有什么样的收敛半径?

解 (1) 记 $A_n = a_n \pm b_n$，则有

$$\sqrt[n]{|A_n|} = \sqrt[n]{|a_n \pm b_n|} \leqslant \sqrt[n]{|a_n|+|b_n|}$$
$$\leqslant \sqrt[n]{2\max(|a_n|,|b_n|)}$$
$$= \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{\max(|a_n|,|b_n|)}$$
$$= \sqrt[n]{2} \cdot \max(\sqrt[n]{|a_n|},\sqrt[n]{|b_n|})$$

于是
$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|A_n|}$$
$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty}\{\sqrt[n]{2}\cdot\max(\sqrt[n]{|a_n|},\sqrt[n]{|b_n|})\}$$
$$= \varlimsup_{n\to\infty}\{\max(\sqrt[n]{|a_n|},\sqrt[n]{|b_n|})\}$$
$$= \max\{\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|},\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}\}$$
$$= \max\left(\frac{1}{R_1},\frac{1}{R_2}\right),$$

故
$$R \geqslant \frac{1}{\max\left(\frac{1}{R_1},\frac{1}{R_2}\right)} = \min(R_1,R_2).$$

(2) 令 $B_n = a_nb_n$，于是有

$$\sqrt[n]{|B_n|} = \sqrt[n]{|a_n||b_n|} = \sqrt[n]{|a_n|}\cdot\sqrt[n]{|b_n|},$$

从而
$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|B_n|} = \varlimsup_{n\to\infty}\{\sqrt[n]{|a_n|}\cdot\sqrt[n]{|b_n|}\}$$
$$\leqslant \{\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\}\cdot\{\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}\}$$
$$= \frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1R_2}$$

故
$$R_1 \geqslant R_1R_2.$$

【2898】 设

$$l = \varliminf_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, L = \varlimsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

证明：幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{n}a_nx^n$ 的收敛半径满足以下不等式：$l \leqslant R \leqslant L$.

证 令 $l_1=\frac{1}{l}$ $L_1=\frac{1}{L}$

因为 $l\geqslant 0, L\geqslant 0$，若 $l=0$，记 $l_1=+\infty$，若 $l=+\infty$，记 $l_1=0$，L 与 l，作同样规定，显然 $L_1\leqslant l_1$，任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0,\delta_2>0$ 满足

$$\frac{1}{1+\delta_1}=1-\frac{\varepsilon}{2},\frac{1}{1-\delta_2}=1+\frac{\varepsilon}{2},$$

对相应的 δ_1,δ_2，存在 $m>0$，当 $n>m$ 时，有

$$l\cdot(1-\delta_2)<\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|<L(1+\delta_1),$$

即 $$\frac{1}{L}\cdot\frac{1}{1+\delta_1}<\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{1-\delta_2}.$$

于是当 $n>m$ 时，有

$$L_1\cdot\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)<\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<l_1\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

进一步，当 $n>m$ 时，有

$$\frac{|a_n|}{|a_m|}=\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}\cdot\frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|}\cdot\cdots\cdot\frac{|a_{m+1}|}{|a_m|}$$
$$<\left[l_1\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]^{n-m},$$

即 $$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{l_1}<\left(\frac{|a_m|}{l_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right).\qquad ①$$

同理有 $$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{L_1}>\left(\frac{|a_m|}{L_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right).\qquad ②$$

又若 $A>0$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A}=1$. 于是存在 $n_0(>m)$，当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\left(\frac{|a_m|}{l_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}<1+\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1+\frac{\varepsilon}{2}},$$

$$\left(\frac{|a_m|}{L_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}>1-\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1-\frac{\varepsilon}{2}}.\qquad ③$$

将 ③ 式代入 ① 和 ②，有

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{l_1}<1+\varepsilon, \qquad \frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{L_1}>1-\varepsilon.$$

于是有 $\quad L_1(1-\varepsilon)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|^{\frac{1}{n}}\leqslant l_1\cdot(1+\varepsilon).$

又若 $L_1=+\infty$，即 $L=0$，显然 $R=0$，级数除 $x_0=0$ 点收敛外，对任一点 $x\neq x_0$ 均发散，于是不妨设 $L_1<+\infty$. 故有

$$\frac{1}{l_1(1+\varepsilon)}\leqslant R\leqslant\frac{1}{L_1(1-\varepsilon)},$$

即 $$\frac{l}{1+\varepsilon}\leqslant R\leqslant\frac{L}{1-\varepsilon},$$

由 ε 的任意性，有 $l\leqslant R\leqslant L$.

【2899】 证明：若 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，且 $|n!a_n|<M(n=1,2,\cdots)$. 其中 M 为常数，则：(1) $f(x)$ 在任意点 a 上可无穷次微分，(2) 如下展开式成立：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (|x|<+\infty).$$

证 (1) 由 $|n!a_n|<M$，有

$$|a_n|<\frac{M}{n!},(n=1,2,\cdots).$$

设 $[-N,N]$ 是包含 x_0 的任一有限区间，由

$$|a_n(x-x_0)^n|\leqslant\frac{M}{n!}(2N)^n,$$

且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{M}{n!}(2N)^n$ 收敛，知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 在包含 x_0 的任意有限区间上一致收敛，于是，该级数在 a 点无穷多次可微.

(2) 由(1) 知

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

在$(-\infty,+\infty)$上任意可微，于是

$$f^{(m)}(x)$$
$$=\sum_{n=m}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m}$$
$$=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{n!}{(n-m)!}a_n(x-x_0)^{n-m},(m=1,2,\cdots).$$

现令　$|x-a|<R,(R>0)$，

于是　$|x-x_0|\leqslant|x-a|+|a-x_0|$
$<R+|a-x_0|=L$，

故有

$$|f^{(m)}(x)|\leqslant\sum_{n=m}^{\infty}\frac{n!}{(n-m)!}|a_n|\cdot L^{n-m}$$
$$\leqslant\sum_{n=m}^{\infty}\frac{n!}{(n-m)!}\cdot\frac{M}{n!}L^{n-m}$$
$$=M\sum_{s=0}^{\infty}\frac{L^s}{s!}=MP,(m=1,2,\cdots).$$

其中　$P=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{L^s}{s!}<+\infty.$

考察余项 $R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

$$=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1},$$
$$(0<\theta<1).$$

于是，当$|x-a|<R$时，有

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{MP}{(n+1)!}R^{n+1},(n=1,2,\cdots).$$

由级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$收敛，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}=0,$$

从而　$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$

于是当$|x-a|<R$时

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

成立. 又由 R 的任意性有，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，上式皆成立.

【2899.1】 当 $x\in(a,b)$ 时，$f(x)\in C^{(\infty)}(a,b)$ 且 $|f^{(n)}(x)|\leqslant c^n(n=0,1,2\cdots)$.

证明：可把函数 $f(x)$ 展开成在区间(a,b) 收敛的幂级数：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\qquad(x_0\in(a,b)).$$

证 因为 $f(x)\in C^{\infty}(a,b)$，于是

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1},$$

$$x_0\in(a,b).$$

令 $$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

$$x\in(a,b),x_0\in(a,b).$$

又 $$|f^{(n)}(x)|\leqslant c^n,\qquad x\in(a,b).$$

于是 $$|R_n(x)|\leqslant\frac{c^{n+1}\cdot(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[c(b-a)]^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛，知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[c(b-a)]^{n+1}}{(n+1)!}=0.$$

于是 $$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,$$

从而 $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,x\in(a,b).$$

【2899.2】 当 $x\in[-1,1]$ 时，设 $f(x)\in C^{(\infty)}[-1,1]$ 且 $f^{(n)}(x)\geqslant0(n=0,1,2\cdots)$.

证明：在区间$(-1,1)$ 可把函数 $f(x)$ 展开成幂级数：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

提示：利用导数 $f^{(n)}(x)$ 的单调性，对于函数 $f(x)$ 泰勒级数的余项 $R_n(x)$，得出评估值：

$$|R_n(x)|\leqslant|x|^{n+1}f(1).$$

证 因为 $f(x)\in C^{\infty}[-1,1]$，有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}\cdot x^{k+1},x\in(-1,1).$$

令 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$，

又由 $f^{(n)}(x)\geqslant 0,\quad (n=0,1,2,\cdots).$

有 $f^{(n)}(x)$ 单调增加，$n=0,1,2,\cdots$. 于是

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|$$

$$\leqslant\frac{|f^{(n)}(1)|}{(n+1)!}|x|^{n+1}\leqslant\frac{|f^{(n)}(1)|}{(n+1)!},$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0,x\in(-1,1).$

于是 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,x\in(-1,1).$

【2900】 证明：若(1) $a_n\geqslant 0$ 且(2) $\lim\limits_{x\to R-0}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S$ 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n=S$ 存在

证 首先证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 收敛，用反证法，设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n=+\infty$ 知，任给 $A>S$，存在 N，有

$$\sum_{n=0}^{N}a_nR^n>A>S.$$

由 $\lim\limits_{x\to R^-}\sum\limits_{n=0}^{N}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{N}a_nR^n>A>S,$

有任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $x\in(R-\delta,R)$ 时,有

$$\sum_{n=0}^{N}a_nx^n>A-\varepsilon.$$

现令 $\varepsilon=\dfrac{A-S}{2}$,则

$$\sum_{n=0}^{N}a_nx^n>A-\varepsilon=A-\frac{A-S}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(A+S)>S.$$

又 $a_n\geqslant 0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\geqslant\sum_{n=0}^{N}a_nx^n,(x\geqslant 0).$$

我们有 $\lim\limits_{x\to R^-}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n>S$ 与假设 $\lim\limits_{x\to R^-}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S$ 相矛盾.于是级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 一定收敛.由阿贝尔定理知,函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

在点 $x=R$ 处左连续,因此

$$\lim_{x\to R^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=f(R)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n=S.$$

展开成函数的幂级数:

【2901】 $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$

解 $$\int_0^x e^{-t^2}\,dt=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}\right]dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)},x\in(-\infty,+\infty).$$

【2902】 $\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$

解 $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^x \left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{4n}\right]dt$

$$= x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{4n+1}}{4n+1},$$

$$x\in[-1,1].$$

【2903】 $\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt.$

解 $\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt = \int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\right]dt$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)},$$

$$x\in(-\infty,+\infty).$$

【2904】 $\int_0^x \frac{\arctan x}{x}dx.$

解 $\int_0^x \frac{\arctan t}{t}dt = \int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{2n+1}\right]dt$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}, x\in[-1,1].$$

【2905】 $\int_0^x \frac{tdt}{\ln(1+t)}$（写出前 4 项）

解 设 $0<|t|<1$，由

$$\frac{1}{t}\ln(1+t)=\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}$$

$$=1-\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{t^m}{m+1}=1-\xi,$$

其中 $\xi=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{t^m}{m+1}.$

易知交错级数

$$\xi=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{t^m}{m+1},$$

当 $|t|<1$ 时收敛，且 $|\xi|<1$. 于是有

$$\frac{1}{\frac{1}{t}\ln(1+t)}=\frac{1}{1-\xi}=\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n.$$

由此当 $|x|<1$ 时,有

$$\int_0^x\frac{t\mathrm{d}t}{\ln(1+t)}=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\frac{1}{t}\ln(1+t)}$$

$$=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-\xi}=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n\right)\mathrm{d}t.$$

由题意,要求四项近似,于是取 t^3 足够了,我们有

$$\xi^0=1,$$

$$\xi^1=\frac{t}{2}-\frac{t^2}{3}+\frac{t^3}{4}-\cdots,$$

$$\xi^2=\frac{t^2}{4}-\frac{t^3}{3}+\cdots,$$

$$\xi^3=\frac{t^3}{8}-\cdots,$$

$$\cdots$$

于是 $$\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n=1-\frac{t}{2}-\frac{t^2}{12}+\frac{t^3}{24}-\cdots.$$

从而当 $|x|<1$ 时,原积分的前四项为

$$\int_0^x\frac{t\mathrm{d}t}{\ln(1+t)}=\int_0^x\left(1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{12}+\frac{t^3}{24}\right)\mathrm{d}t+O(x^5)$$

$$=x+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{36}+\frac{x^4}{96}+O(x^5).$$

运用逐项微分法,计算下列级数的和(2906 ~ 2910).

【2906】 $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots.$

解 令 $F(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots,$

易知收敛域为 $x\in(-1,1)$,于是有

$$F'(x)=1+x^2+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x^2}.$$

又 $F(0)=0$，有

$$F(x)=\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, x\in(-1,1).$$

于是当 $|x|<1$ 时，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

【2907】 $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots.$

解 设 $S(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$，

易知收敛域为 $x\in[-1,1]$. 于是

$$S'(x)=1-x^2+x^4-\cdots=\frac{1}{1+x^2}.$$

又 $S(0)=0$，有

$$S(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\text{artan}x,$$

于是，当 $|x|\leqslant 1$ 时，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\arctan x.$$

【2908】 $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$

解 设 $S(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$，

易知收敛域为 $x\in(-\infty,+\infty)$. 于是

$$S'(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots.$$

从而
$$S(x)-S'(x)=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots=\mathrm{e}^{-x}, \quad ①$$

$$S(x)+S'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=\mathrm{e}^{x}. \quad ②$$

由①+②有

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch}x,$$

$$x\in(-\infty,+\infty).$$

【2909】 $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\cdots$

解 设

$$S(x)=\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\cdots,$$

易知收敛域为 $x\in[-1,1]$,有

$$S'(x)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}+\cdots$$

$$=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right)$$

$$=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}[-\ln(1-x)],0<|x|<1.$$

又 $S(0)=0$,有

$$S(x)=\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t=1-\frac{1-x}{x}\ln(1-x),0<|x|<1.$$

当 $x=0$ 时,级数收敛到零;当 $x=1$ 时,级数收敛到 1;当 $x=-1$ 时,级数收敛到 $1-2\ln 2$. 事实上

$$-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$$

$$=-\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$

$$=2\cdot\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots\right)+1$$

$$=1-2\ln 2.$$

由此,我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$$

$$=\begin{cases}1+\dfrac{1-x}{x}\ln(1-x), 0<|x|<1, \\ 0, & x=0, \\ 1-2\ln2, & x=-1, \\ 1, & x=1.\end{cases}$$

【2910】 $1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots$

提示:把级数的导数乘以 $1-x$.

解　设

$$S(x)=1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots,$$

于是有

$$S'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}2x+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}3x^2+\cdots.$$

用 $1-x$ 乘上式有

$$\begin{aligned}&(1-x)S'(x)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots\\&=\frac{1}{2}S(x),\end{aligned}$$

于是有　$\dfrac{S'(x)}{S(x)}=\dfrac{1}{2(1-x)}$.

积分有　$\ln S(x)=\ln\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$,

即

$$\begin{aligned}F(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+1\\&=\frac{1}{\sqrt{1-x}}, x\in(-1,1).\end{aligned}$$

当 $x=1$ 时,由拉阿贝判别法

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1.$$

因此,级数发散.

当 $x=-1$ 时，由 2689 题知，级数条件收敛. 因此

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n=\frac{1}{\sqrt{1-x}},x\in[-1,1).$$

运用逐项积分法，计算下列级数的和(2911 ～ 2913).

【2911】 $x+2x^2+3x^3+\cdots$.

解 设 $S(x)=x+2x^2+3x^3+\cdots$,

于是 $$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}x^4+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)x^3+\left(1-\frac{1}{4}\right)x^4+\cdots$$

$$=(x^2+x^3+x^4+\cdots)-\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\cdots\right)$$

$$=x(1+x+x^2+\cdots)-\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots\right)$$

$$=\frac{x}{1-x}+\ln(1-x),\qquad x\in(-1,1).$$

从而 $$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\left(\frac{x}{1-x}+\ln(1-x)\right)'$$

$$=\frac{x}{(1-x)^2},x\in(-1,1).$$

当 $|x|=1$ 时，级数通项不趋于零，级数发散.

【2912】 $x-4x^2+9x^3-16x^4+\cdots$.

解 设

$$S(x)=x-4x^2+9x^3-16x^4+\cdots,$$

由 $$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x^3+\frac{9}{4}x^4-\frac{16}{5}x^5+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\left(1+\frac{1}{3}\right)x^3+\left(2+\frac{1}{4}\right)x^4-\left(3+\frac{1}{5}\right)x^5+\cdots$$

$$=x+\left(-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\cdots\right)$$

$$-x^3(1-2x+3x^2-\cdots)$$

$$=x-\ln(1+x)-x^3(x-x^2+x^3-\cdots)'$$

$$= x - \ln(1+x) - x^3 \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)'$$

$$= x - \ln(1+x) - \frac{x^3}{(1+x)^2}, x \in (-1,1),$$

从而 $$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$$

$$= \left[x - \ln(1+x) - \frac{x^3}{(1+x)^2}\right]'$$

$$= \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}, x \in (-1,1).$$

当 $|x| = 1$ 时,级数发散.

【2913】 $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \cdots$.

解 设

$$S(x) = 1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \cdots,$$

由 $$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \cdots$$

$$= x(x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots)$$

$$= x \cdot \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{(同 2911 题结论)}$$

$$= \frac{x^2}{(1-x)^2}, x \in (-1,1).$$

有 $$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = \left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)'$$

$$= \frac{2x}{(1-x)^3}, x \in (-1,1).$$

当 $|x| = 1$ 时,级数发散.

【2914】 证明:级数 $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 满足方程 $y^{(4)} = y$.

证 易知级数的收敛域为$(-\infty, +\infty)$.

由 $$y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}, y'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!},$$

$$y''' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}, \qquad y^{(4)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!},$$

有 $$y^{(4)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}=y.$$

【2915】 证明:级数 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$ 满足方程 $xy''+y'-y=0$.

证 易知所给级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

由 $$y'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!(n+1)!},$$

$$y''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!(n+1)!},$$

有 $$xy''+y'$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)!(n+1)!}+\frac{1}{n!(n+1)!}\right]x^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}=y,$$

从而 $$xy''+y'-y=0.$$

确定在复数域($z=x+iy$)内下列幂级数的收敛半径和收敛圆(2916 ~ 2920).

【2916】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1-i)^n}{n\cdot 2^n}$.

解 令 $a_n=\frac{1}{n\cdot 2^n}$,

由 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=2,$$

有收敛半径 $R=2$,收敛圆为

$$|z-1-i|<2,$$

即 $$(x-1)^2+(y-1)^2<2^2.$$

【2917】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)}$.

解 令

$$a_n=\frac{(1+i)^n}{n(n+1)},$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{|1+i|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

有收敛半径 $R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,收敛圆为 $|z|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,即 $x^2+y^2<\dfrac{1}{2}$.

【2918】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!z^n}{(1+i)(1+2i)\cdots(1+ni)}$.

解 令 $a_n=\dfrac{n!}{(1+i)(1+2i)\cdots(1+ni)}$,

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|1+(n+1)i|}{n+1}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+(n+1)^2}}{n+1}=1,$$

知收敛半径 $R=1$,收敛圆为 $|z|<1$,即 $x^2+y^2<1$.

【2919】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n^{\alpha+i\beta}}$.

解 令 $a_n=\dfrac{1}{n^{\alpha+i\beta}}$,

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{\alpha+i\beta}\right|$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha}=1,$$

知收敛半径 $R=1$,收敛圆为 $|z|<1$,即 $x^2+y^2<1$.

【2920】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-e^{i\alpha})^n}{n(1-e^{i\alpha})^n}$.

解 令 $a_n=\dfrac{1}{n(1-e^{i\alpha})^n}$,

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{n}(1-e^{i\alpha})\right|$

$$=|1-(\cos\alpha+i\sin\alpha)|=\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}$$

$$=\left|2\sin\frac{\alpha}{2}\right|,$$

知收敛半径 $R=\left|2\sin\dfrac{\alpha}{2}\right|$,收敛圆为

$$|z-e^{i\alpha}|<\left|2\sin\frac{\alpha}{2}\right|,$$

即 $$(x-\cos\alpha)^2+(y-\sin\alpha)^2<4\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

【2921】 利用牛顿二项式公式，近似计算$\sqrt[3]{9}$，若取展开式的前三项，估计所得的误差.

解 $$\sqrt[3]{9}=2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=2\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{8^3}-\cdots\right),$$

当取展式的头三项时，误差

$$|R_3|<2\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{2\cdot5}{3^3}\cdot\frac{1}{8^3}=\frac{10}{3^4\cdot8^3}<0.001.$$

估计头三项，精确到四位小数，有

$$\sqrt[3]{9}\doteq2\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{2}{3^2}\cdot\frac{1}{8^2}\right)\doteq2.080.$$

【2922】 近似计算

(1) $\arctan1.2$；(2) $\sqrt[10]{1000}$；(3) $\frac{1}{\sqrt{e}}$；(4) $\ln1.25$.

并估计相应的误差.

解 (1) 由

$$\arctan x+\arctan y=\arctan\frac{x+y}{1-xy},$$

令 $x=1,\qquad \frac{x+y}{1-xy}=1.2,$

即 $y=\frac{1}{11}$，于是

$$\arctan1.2=\arctan1+\arctan\frac{1}{11}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{11}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{11}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{11}\right)^5-\cdots.$$

若取头三项，则其误差

$$|R_3|<\frac{1}{5}\left(\frac{1}{11}\right)^5<10^{-5}.$$

估计前三项，每一项取到小数点后六位有

$$\arctan 1.2=0.87606.$$

(2) $\sqrt[10]{1000}=\sqrt[10]{1024-24}=2(1-0.024)^{\frac{1}{10}}$

$$=2\left[1-\frac{0.024}{10}+\frac{\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}-1\right)}{2!}(0.024)^2-\cdots\right],$$

又上述级数的各项递减，今取三项，则其误差

$$|R_3|<2\cdot\frac{\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}-1\right)\left(\frac{1}{10}-2\right)}{3!}\cdot$$

$$(0.024)^3[1+0.024+(0.024)^2+\cdots]$$

$$<10^{-6}.$$

估计前三项，每一项取到小数点后七位有

$$\sqrt[10]{1000}\doteq 1.995263.$$

(3) $\frac{1}{\sqrt{e}}=e^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^3}$

$$+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{2^4}-\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{2^6}-\cdots,$$

各取前七项，则其误差

$$|R_7|<\frac{1}{7!2^7}<10^{-5},$$

估计前七项，每一项取到小数点后六位，即得

$$\frac{1}{\sqrt{e}}\doteq 0.60653.$$

(4) $\ln 1.25=\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\cdot 4^2}+\frac{1}{3\cdot 4^3}-\frac{1}{4\cdot 4^4}+\frac{1}{5\cdot 4^5}-\frac{1}{6\cdot 4^6}+\cdots.$$

若取前六项，则其误差

$$|R_6|<\frac{1}{7\cdot 4^7}<10^{-5}.$$

估计前六项，每一项取到小数点后六位，即有

$$\ln 1.25 \doteq 0.22314.$$

利用相应的展开式，以指定的精度计算以下函数的数值(2923 ～ 2327).

【2923】 sin18°，精确到 10^{-5}.

解 $\sin 18° = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!10^3} + \frac{\pi^5}{5!10^5} - \cdots,$

该级数为交错级数，若取前 n 项，则其误差

$$R<\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n+1}.$$

现令 $$\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n+1}<10^{-5}.$$

今计算 $n=3$ 时即满足要求，估计算前三项，每一项取到小数点后六位，有

$$\sin 18° \doteq 0.30902.$$

【2924】 cos1°，精确到 10^{-6}.

解 $\cos 1° = \cos\frac{\pi}{180} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^4 - \cdots,$

经计算，令 $n=2$，有

$$R<\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^4<10^{-6},$$

于是有 $\cos 1° \doteq 0.999848.$

【2925】 tan9°，精确到 10^{-3}

解 $\tan 9° = \tan\frac{\pi}{20} = \frac{\pi}{20} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{20}\right)^3 + \frac{2}{15}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5 + \cdots,$

(2891 题结论).

若取前二项，且上述级数的各项递减，则其误差

$$R < \frac{5}{12}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5\left[1+\left(\frac{\pi}{20}\right)^2+\left(\frac{\pi}{20}\right)^4+\cdots\right] < 10^{-3}.$$

今计算前二项，每一项取到小数点后四位，有

$$\tan 9^\circ \doteq 0.158.$$

【2926】 e，精确到 10^{-6}

解 $e = 1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}$,

今取 $1+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}$ 作为 e 的近似值，则其误差

$$R = \sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m!} = \frac{1}{n!}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdots m}$$

$$< \frac{1}{n!}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{m-n}} = \frac{1}{n!n},$$

令 $\frac{1}{n!n} < 10^{-6}$，即 $n!n > 10^6$. 经计算 $n = 9$ 满足要求. 于是，当每项取到小数点后七位，有

$$e \doteq 1+\sum_{n=1}^{9}\frac{1}{n!} \doteq 2.718282.$$

【2927】 ln1.2，精确到 10^{-4}.

解 $\ln(1.2) = \ln(1+0.2)$

$$= 0.2-\frac{1}{2}(0.2)^2+\frac{1}{3}(0.2)^3-\frac{1}{4}(0.2)^4+\cdots,$$

若取前 n 项，则其误差

$$R < \frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1}.$$

令 $$\frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1} < 10^{-4},$$

经计算 $n = 4$ 满足要求. 即

$$R < \frac{1}{5}(0.2)^5 < 10^{-4}.$$

于是，当每项取到小数点后五位，即有

$$\ln 1.2 \doteq 0.2-\frac{1}{2}(0.2)^2+\frac{1}{3}(0.2)^3-\frac{1}{4}(0.2)^4$$
$$\doteq 0.1823.$$

【2928】 根据以下等式：$\frac{\pi}{6}=\arcsin\frac{1}{2}$，求出 π，精确到 10^{-4}.

解 $\pi=6\arcsin\frac{1}{2}$

$$=6\Big[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\cdot\frac{1}{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{11}+\cdots\Big].$$

今取前六项，且上述级数的各项递减，则其误差

$$R<6\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12}\cdot\frac{1}{13}\left(\frac{1}{2}\right)^{13}\Big[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots\Big]<10^{-4}.$$

估计前六项，每一项取到小数点后五位，即

$$\pi\doteq 31416.$$

【2929】 利用恒等式：

$$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3},$$

计算 π 数，精确到 0.001.

解 由题意有

$$\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}-\cdots\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\cdots\right).$$

由于等式右端的两个级数皆是莱布尼兹型的，于是在被加数与加数中，省略的未写出的项的校正数分别为

$$0<R_1<\frac{4}{11\cdot2^{11}}<0.0002,$$

$$0<R_2<\frac{4}{9\cdot 3^9}<0.0002.$$

于是，总误差 $R\leqslant R_1+R_2<0.001$，计算保留下来的项近似到小数点后四位，即可保证达到所需误差，列成下表（括号中的正、负号指示校正数的符号）：

正项	负项
$\frac{4}{2}=2.0000$	$\frac{4}{3\cdot 2^3}=0.1667$ (—)
$\frac{4}{5\cdot 2^5}=0.0250$	$\frac{4}{7\cdot 2^7}=0.0045$ (—)
$\frac{4}{9\cdot 2^9}=0.0009$ (—)	$\frac{4}{3\cdot 3^3}=0.0494$ (—)
$\frac{4}{3}=1.3333$ (+)	+) $\frac{4}{7\cdot 3^7}=0.0003$ (—)
+) $\frac{4}{5\cdot 3^5}=0.0033$ (—)	0.2209
3.3625	

又 $\qquad 3.3625+3.1415=3.1416$，

从而 $\qquad 3.1415<\pi<3.1420.$

因此，取 $\pi\doteq 3.142$. 准确到 0.001.

【2930】 利用恒等式：

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239},$$

确定 π 数，精确到 10^{-9}.

解 首先说明恒等式的来源，由

$$\arctan x+\arctan y$$

$$=\arctan\frac{x+y}{1-xy},\left(|x+y|<\frac{\pi}{2}\right).$$

令 $\frac{x+y}{1-xy}=1$，即 $(1+x)(1+y)=2$，于是有

$$\frac{\pi}{4}=\arctan x+\arctan y.$$

若令 $x=\frac{1}{2}$,则 $y=\frac{1}{3}$ 有

$$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}.$$

这是 2929 题的恒等式.若令 $x=\frac{1}{5}$,记 $\arctan\frac{1}{5}=\alpha$,有

$$\tan\alpha=\frac{1}{5},$$

$$\tan 2\alpha=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{5}{12},$$

$$\tan 4\alpha=\frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}}=\frac{120}{119}\doteq 1.$$

令 $$\beta=4\alpha-\frac{\pi}{4},$$

则 $$\tan\beta=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}=\frac{1}{239},$$

于是 $$\beta=\arctan\frac{1}{239},$$

从而 $$\frac{\pi}{4}=4\alpha-\beta=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}.$$

我们有 $$\pi=16\arctan\frac{1}{5}-4\arctan\frac{1}{239}$$

$$=16\left\{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^9}-\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{5^{11}}+\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{5^{13}}-\cdots\right\}$$

$$-4\left\{\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{239^3}+\cdots\right\},$$

省略的未写出的项的校正数分别为

$$0 < R_1 < \frac{16}{15 \cdot 15^{16}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^9},$$

$$0 < R_2 < \frac{4}{5 \cdot 239^5} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^9}.$$

这是因为上述两级数皆为莱布尼兹型交错级数. 于是,总误差 $R \leqslant R_1 + R_2 < \frac{1}{10^9}$.

现计算保留下来的项近似到小数点后 10 位,列成下表(括号中的 ± 号表示校正数的符号):

$$\frac{16}{5} = 3.2000000000 \qquad \frac{16}{3 \cdot 5^3} = 0.0426666667 \quad (-)$$

$$\frac{16}{5 \cdot 5^5} = 0.0010240000 \qquad \frac{16}{7 \cdot 5^7} = 0.0000292571 \quad (+)$$

$$\frac{16}{9 \cdot 5^9} = 0.0000009102 \quad (+) \qquad +)\ \frac{16}{11 \cdot 5^{11}} = 0.0000000298 \quad (-)$$

$$0.0426959536$$

$$+)\ \frac{16}{13 \cdot 15^{13}} = 0.0000000010 \quad (+)$$

$$3.2010249112$$

$$-)\ 0.0426959536$$

$$3.1583289576$$

$$\frac{4}{239} = 0.0167364017 \quad (+)$$

$$+)\ \frac{4}{3 \cdot 239^3} = 0.000000977 \quad (-)$$

$$0.0167363040$$

故我们有

$$3.1583289576 < 16\alpha < 3.1583289577,$$

$$-0.0167363040 = -4\beta = -0.0167363040,$$

$$\pi = 16\alpha - 4\beta,$$

$$3.1415926536 < \pi < 3.1415926537.$$

由此,按准确到 10^{-9} 的精度,$\pi \doteq 3.141592654$.

【2931】 利用公式:

$$\ln(n+1) = \ln n + 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \cdots\right],$$

求出 ln2 和 ln3，精确到 10^{-5}.

解 当 $n=1$ 时

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{9\cdot 3^9}+\cdots\right),$$

省略的项 $R=2\left(\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}}+\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{3^{13}}+\cdots\right)$

$$<\frac{2}{11\cdot 3^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^2}}<\frac{2}{10^6}.$$

计算到小数点后 6 位，作出下表

$$\frac{2}{3}=0.666667\quad(-)$$

$$\frac{2}{3\cdot 3^3}=0.024691\quad(+)$$

$$\frac{2}{5\cdot 3^5}=0.001646\quad(+)$$

$$\frac{2}{7\cdot 3^7}=0.000131\quad(-)$$

$$+)\ \frac{2}{9\cdot 3^9}=0.000011\quad(+)$$

$$0.693146$$

于是 $0.693146<\ln 2<0.693148.$

从而 $\ln 2=0.69314\cdots$，并且所有写出来的五位数字都是精确的，若将第六位四舍五入，有 $\ln 2\doteq 0.69315$. 准确到 10^{-5}.

令 $n=2$，有

$$\ln 3=\ln 2+2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}+\frac{1}{7\cdot 5^7}+\frac{1}{9\cdot 5^9}+\cdots\right), \tag{①}$$

与 ln2 一样，计算取出的诸项到小数点后 6 位，作出下表：

$$\frac{2}{5}=0.400000$$

$$\frac{2}{3\cdot 5^3}=0.005333\quad(+)$$

$$\frac{2}{5\cdot 5^5}=0.000128$$

$$\frac{2}{7\cdot 5^7}=0.000004\quad(-)$$

$$+)\ \frac{2}{9\cdot 5^9}=0.000000\quad(+)$$

$$0.405465$$

从而①式右端的级数的和为 0.40546…，若将第 6 位四舍五入，得 0.40547. 最后，由①式有

$$\ln 3 \doteq 0.693146\cdots+0.405465\cdots=1.09861\cdots,$$

若将第 6 位四舍五入有

$$\ln 3 \doteq 0.69315+0.40546=1.09861,$$

准确到 10^{-5}.

【2932】 用被积函数的级数展开式，计算以下积分，精确到 0.001：

(1) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$；　(2) $\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}dx$；

(3) $\int_0^2 \frac{\sin x}{x}dx$；　(4) $\int_0^1 \cos x^2 dx$；

(5) $\int_0^1 \frac{\operatorname{sh}x}{x}dx$；　(6) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$；

(7) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$；　(8) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$；

(9) $\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$；　(10) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x}dx$；

(11) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x}dx$；　(12) $\int_0^1 x^x dx$.

解　(1) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$

$$=\int_0^1\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\cdots\right)dx$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot 2!}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{9\cdot 4!}-\cdots,$$

写出的项计算到小数点后四位,作下表:

$$1 = 1.0000 \qquad \frac{1}{3} = 0.3333 \quad (+)$$

$$\frac{1}{5\cdot 2!} = 0.1000 \qquad +)\ \frac{1}{7\cdot 3!} = 0.0238 \quad (+)$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad 0.3571$$

$$+)\ \frac{1}{9\cdot 4!} = 0.0046 \quad (+)$$

$$1.1046$$

$$-)0.3571$$

$$0.7475$$

于是 $$0.7473 < \int_0^1 e^{-x^2}dx < 0.7476,$$

从而 $$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 0.747,$$

准确到 0.001.

(2) $\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}dx$

$$= \int_2^4\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2!x^2}+\frac{1}{3!x^3}+\frac{1}{4!x^4}+\cdots\right)dx$$

$$= 2+\ln 2+\frac{1}{2!\cdot 4}+\frac{3}{3!\cdot 32}+\frac{7}{4!\cdot 192}+\cdots$$

$$= 2+0.6931+0.1250+0.0156+0.0015+\cdots$$

$$\doteq 2.8352,$$

于是 $$\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}dx \approx 2.835,$$

准确到 0.001.

(3) $$\int_0^2 \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^2 \frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)dx$$

$$= 2-\frac{2^3}{2\cdot 3!}+\frac{2^5}{5\cdot 5!}-\frac{2^7}{7\cdot 7!}+\cdots,$$

写出的项的计算其值如

$$2 = 2.0000 \qquad \frac{2^3}{3\cdot 3!} = 0.4444 \quad (+)$$

$$\begin{array}{r} +)\ \dfrac{2^5}{5\cdot 5!}=0.0533\quad(+) \\ \hline 2.0533 \\ -)0.4480 \\ \hline 1.6053 \end{array}\qquad \begin{array}{r} +)\ \dfrac{2^7}{7\cdot 7!}=0.0036\quad(+) \\ \hline 0.4480 \end{array}$$

于是 $$1.6051<\int_0^2\frac{\sin x}{x}dx<1.6054,$$

这是因为级数中省略的项的误差

$$0<R<\frac{2^9}{9\cdot 9!}<\frac{1}{10^3}.$$

从而 $$\int_0^2\frac{\sin x}{x}dx\approx 1.605.$$

$$(4)\ \int_0^1\cos x^2 dx=\int_0^1\left(1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\cdots\right)dx$$

$$=1-\frac{1}{5\cdot 2!}+\frac{1}{9\cdot 4!}-\cdots,$$

计算取出的各项值如下

$$1=1.0000\qquad\qquad \frac{1}{5\cdot 2!}=0.1000$$

$$\begin{array}{r} +)\ \dfrac{1}{9\cdot 4!}=0.0046\quad(+) \\ \hline 1.0046 \\ -)0.1000 \\ \hline 0.9046 \end{array}$$

这里级数省略项误差

$$0<R<\frac{1}{13\cdot 6!}<\frac{1}{10^3},$$

于是 $$\int_0^1\cos x^2 dx\approx 0.9046,$$

从而 $$\int_0^1\cos x^2 dx\approx 0.905.$$

准确到 0.001.

$$(5)\ \int_0^1\frac{\operatorname{sh}x}{x}dx=\int_0^1\frac{1}{x}\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)dx$$

$$=1+\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}+\cdots,$$

省略各项的值

$$R<\frac{1}{7\cdot7!}\left(1+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^4}+\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{7\cdot7!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7^2}}<10^{-3},$$

写出的各项值计算如下

$$1=1.0000$$
$$\frac{1}{3\cdot3!}=0.0556\quad(-)$$
$$+)\ \frac{1}{5\cdot5!}=0.0017\quad(+)$$
$$\overline{\qquad\qquad 1.0573\qquad\qquad}$$

于是$\int_0^1\frac{\mathrm{sh}x}{x}\mathrm{d}x\approx1.057$,准确到 0.001.

(6) 当 $n\geqslant2$ 时

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{x^3}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^3}$$
$$=\left(\frac{1}{x}\right)^3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{x}\right)^{3n}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{x}\right)^{3n+3},$$

于是

$$I\triangleq\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{3n+3}\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3n+2}$$
$$=\frac{1}{8}-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^8-\frac{1}{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{11}+\cdots.$$

取前两项的近似值,有

$$I=0.119+\theta,(0<\theta<0.001).$$

若直接积分,有

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$$

$$=\int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{1}{3}\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Bigg|_2^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{6}\ln3-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{6}\ln3\approx0.119.$$

准确到 0.001.

(7) 由

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{3}}=1+\frac{x^2}{3}+\frac{4\cdot x^4}{3^2\cdot2!}+\cdots,$$

有 $$\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^5}+\cdots\doteq0.337.$$

准确到 0.001.

(8) $$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

$$=\int_0^1(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\int_0^1\left(1-\frac{1}{2}x^4+\frac{1\cdot3}{2^2\cdot2!}x^8+\cdots\right)dx$$

$$=1-\frac{1}{5\cdot2}+\frac{1\cdot3}{9\cdot2^2\cdot2!}-\cdots-\frac{1\cdot3\cdots45}{93\cdot2^{23}\cdot23!}+\cdots$$

$$=(1.0000+0.0417+0.0160+0.0090+0.0060$$
$$+0.0043+0.0033+0.0026+0.0022+0.0018$$
$$+0.0014+0.0012)-(0.1000+0.0240$$
$$+0.0117+0.0072+0.0050+0.0037+0.0029$$
$$+0.0024+0.0020+0.0016+0.0013+0.0010)+\cdots$$
$$\approx0.927.$$

(9) 当 $x\in[10,100]$,有

$$\ln(1+x)=\ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$=\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{x}\right)^{n},$$

于是,有$\int_{10}^{100}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$

$$=\int_{10}^{100}\frac{\ln x}{x}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_{10}^{100}x^{-n-1}dx$$

$$=\frac{3}{2}\ln^{2}10+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{2}}\frac{1}{10^{n}}\left(1-\frac{1}{10^{n}}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\ln^{2}10+\frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{4\cdot10^{2}}\left(1-\frac{1}{10^{2}}\right)$$

$$+\frac{1}{9\cdot10^{3}}\left(1-\frac{1}{10^{3}}\right)+\cdots$$

$$\approx 8.040,$$

准确到 0.001.

(10) $$\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\arctan x}{x}dx=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{5}-\cdots,\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{2}\cdot2^{3}}+\frac{1}{5^{2}\cdot2^{5}}-\frac{1}{7^{2}\cdot2^{7}}+\cdots,$$

于是 $$\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\arctan x}{x}dx\approx 0.487.$$

准确到 0.001.

(11) $$\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin x}{x}dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}\left(x+\frac{x^{3}}{2\cdot3}+\frac{1\cdot3x^{5}}{2\cdot4\cdot5}+\cdots\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{4}\cdot3^{2}}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5^{2}\cdot2^{5}}+\cdots,$$

省略项的和值

$$R<\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{7^{2}}\cdot\frac{1}{2^{7}}\left(1+\frac{1}{2^{2}}+\cdots\right)$$

$$<\frac{1}{7^2\cdot 2^7}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}<\frac{1}{10^3},$$

于是 $$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin x}{x}\mathrm{d}x\approx 0.507.$$

(12) 由

$$x^x=\mathrm{e}^{x\ln x}=1+x\ln x+\frac{(x\ln x)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x\ln x)^n}{n!}+\cdots,$$

又由 2286 题知

$$\int_0^1 x^n\ln^n x\,\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}},$$

于是 $$\int_0^1 x^x\mathrm{d}x=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{27}-\frac{1}{256}+\cdots,$$

若取前四项，则误差为

$$R<\frac{4!}{4!(4+1)^{4+1}}=\frac{1}{5^5}<\frac{1}{10^3}.$$

故 $$\int_0^1 x^x\mathrm{d}x\approx 0.783.$$

准确到 0.001.

【2933】 求出正弦曲线 $y=\sin x(0\leqslant x\leqslant \pi)$ 的一个半波的弧长，精确到 0.01.

解 弧

$$S=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\cos^2 x-\frac{1}{2!\cdot 2^2}\cos^4 x+\frac{1\cdot 3}{3!\cdot 2^3}\cos^6 x-\cdots\right)\mathrm{d}x.$$

又由 2290 题结论知

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1}\cdot n!\cdot n!},$$

有 $$S=2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\cdot 2!}{2^4}-\frac{1}{2!2^2}\cdot\frac{\pi\cdot 4!}{2^5\cdot 2!2!}+\frac{1\cdot 3}{3!2^3}\cdot\frac{\pi\cdot 6!}{2^7\cdot 3!3!}-\cdots\right)$$

$$= \pi\left(1 + \frac{1}{4} - \frac{3}{64} + \frac{5}{256} - \cdots\right),$$

若以写出的各项值为 S 值,则误差 R 满足

$$0 < R < \frac{3 \cdot 5 \cdot 2\pi}{4!2^4} \cdot \frac{8!}{2^9 \cdot 4!4!} < \frac{1}{10^2},$$

于是 $\qquad S \approx 3.14(1 + 0.25 - 0.05 + 0.02) \approx 3.83.$

【2934】 椭圆半轴分别为 $a = 1$ 和 $b = \frac{1}{2}$,求椭圆的弧长,精确到 0.01.

解 由椭圆的参数方程

$$x = a\sin t, \qquad y = b\cos t,$$

于是
$$\mathrm{d}s = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$
$$= a\sqrt{1 - \mathrm{e}^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t,$$

其中 $\mathrm{e} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ 为椭圆的离心率.故有

$$S = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \mathrm{e}^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$
$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^2\sin^2 t - \frac{1}{2!2^2}\mathrm{e}^4\sin^4 t - \frac{1 \cdot 3}{3! \cdot 2^3}\mathrm{e}^6\sin^6 t - \cdots\right)\mathrm{d}t$$
$$= 4a\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 \cdot \frac{\pi \cdot 2!}{2^3} - \frac{1}{2!2^2}\mathrm{e}^4 \cdot \frac{\pi \cdot 4!}{2^5 \cdot 2! \cdot 2!} - \frac{1 \cdot 3}{3!2^3}\mathrm{e}^6 \cdot \frac{\pi \cdot 6!}{2^7 \cdot 3!3!} - \cdots\right).$$

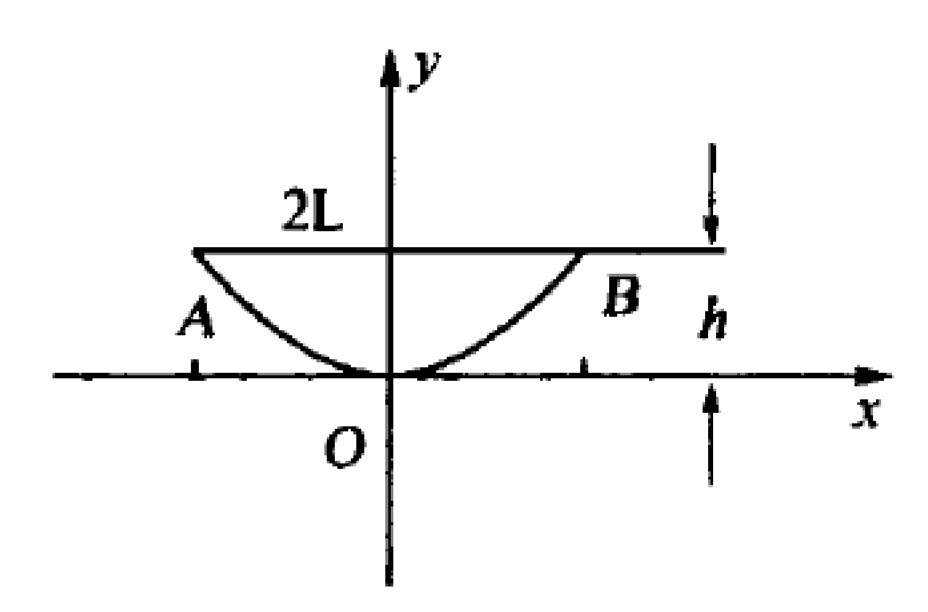
若以前五项作为 S 的近似值,则其误差 $0 < R < 10^{-2}$,代入 a,b 值有

$$S = 2\pi\left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{64} \cdot \frac{9}{16} - \frac{5}{256} \cdot \frac{27}{64} - \frac{5 \cdot 27 \cdot 3}{256 \cdot 64 \cdot 4} - \cdots\right)$$
$$\approx 2\pi(1 - 0.188 - 0.026 - 0.008 - 0.003 - \cdots)$$
$$\approx 4.84.$$

【2935】 电线悬挂在两根桩上,两根桩之间的距离为 $2l = 20\mathrm{m}$,电线具有抛物线形状.若凹处的矢 $h = 40\mathrm{cm}$,计算电线的长

度,精确到 1cm.

解 建立坐标系如下



于是,$A(-10,0.4)$,$B(10,0.4)$,则抛物线 AOB 的方程可设为 $x^2=2py$,从而

$$10^2=2p\times 0.4,$$

有 $p=125$.

所以方程为 $y=\frac{1}{250}x^2$.

故所求的电线长为

$$S=2\int_0^{10}\sqrt{1+\left(\frac{1}{125}x\right)^2}\,dx$$

$$=250\int_0^{\frac{2}{25}}\sqrt{1+t^2}\,dt=250\int_0^{\frac{2}{25}}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}\,dt$$

$$=250\int_0^{\frac{2}{25}}\left(1+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2!\cdot 2^2}t^4+\frac{1\cdot 3}{3!\cdot 2^3}t^6-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4!2^4}t^8+\cdots\right)dt$$

$$=250\left(\frac{2}{25}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2^3}{25^3}-\frac{1}{5\cdot 2!\cdot 2^2}\cdot\frac{2^5}{25^5}+\cdots\right),$$

今取级数的前两项作为 S 的近似值,则其误差

$$0<R<\frac{250}{5\cdot 2!\cdot 2^2}\cdot\frac{2^5}{25^5}<10^{-2}.$$

因此 $$S\approx 250\left(\frac{2}{25}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2^3}{25^3}\right)\approx 20.02.$$

于是所求的电线长为 20.02 米,准确到 0.01 米.

§6. 傅里叶级数

1. **展开定理** 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-l,l)$ 为逐段连续并且具有逐段连续导数 $f'(x)$，而且它的断点 ξ 是正则的(亦即 $f(\xi)=\frac{1}{2}[f(\xi-0)+f(\xi+0)]$)，则函数 $f(x)$ 在这个区间可以用傅里叶级数表示：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad ①$$

其中 $$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad (n=0,1,2,\cdots) \qquad ②$$

和 $$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad (n=1,2,\cdots) \qquad ②'$$

特别是：

(1) 若函数 $f(x)$ 是偶函数，则具有：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l} \qquad ③$$

其中 $$a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad (n=0,1,2,\cdots);$$

(2) 若函数 $f(x)$ 是奇函数，则得出：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad ④$$

其中 $$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \qquad (n=1,2,\cdots).$$

在 $(0,l)$ 区间有定义并拥有上面所提到的连续性质的函数 $f(x)$，在这个区间可以用公式(3) 以及公式(4) 表示.

2. **完备性条件** 对任一在区间 $[-l,l]$ 上可积且其平方也是可积的函数 $f(x)$，作具系数(2)、(2′) 的级数(1)，则李雅普诺夫等式成立：

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-1}^{l}f^2(x)\mathrm{d}x.$$

3. **傅里叶级数的积分** 在区间 $(-l,l)$ 按黎曼意义可积分的

函数 $f(x)$ 的傅里叶级数(1)(即使是发散级数),都可在这个区间以逐项积分.

【2936】 把函数 $f(x)=\sin^4 x$ 展开成傅里叶级数.

解 在 $[-\pi,\pi]$ 上,设 $f(x)=\sin^4 x$ 展成的傅里叶级数为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

由

$$\sin^4 x=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x,$$

有

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^4 x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{4}.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^4 x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{8}\cos nx-\frac{1}{2}\cos 2x\cos nx+\frac{1}{8}\cos 4x\cos nx\right)\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}0, & n\neq 2,n\neq 4,\\ -\dfrac{1}{2}, & n=2,\\ -\dfrac{1}{8}, & n=4.\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4 x\sin nx\,\mathrm{d}x=0,(n=1,2,\cdots).$$

又 $f(x)$ 为连续函数,故 Fourier 级数收敛于函数本身,即

$$f(x)=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x.$$

【2937】 三角多项式

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix).$$

的傅里叶级数是什么样的?

解 $P_n(x)$ 是以 2π 为周期的函数,于是我们只考虑在$[-\pi,\pi]$上展成的傅里叶级数.

由

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_n(x)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix)\mathrm{d}x$$

$$=2\alpha_0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_n(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\alpha_n,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_n(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\beta_n,$$

于是,在$[-\pi,\pi]$上,我们有

$$P_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix).$$

【2938】 把函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x\qquad(-\pi<x<\pi).$$

展开成傅里叶级数,作出函数图形及其傅里叶级数的若干部分和的图形.

利用展开式,求解莱布尼茨级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

解 由

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sgn}x\,\mathrm{d}x = 0,$$

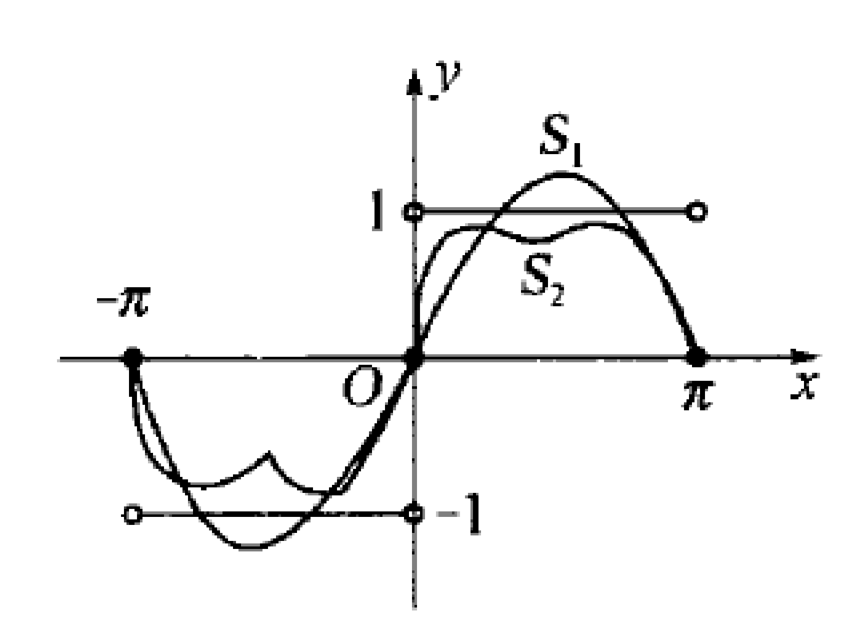
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sgn}x\cos nx\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sgn}x\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^2\mathrm{sgn}x\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n], \end{aligned}$$

而 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上只有一个第一类间断点，于是其傅里叶级数收敛. 且

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$f(x)$ 及其傅里叶级数的若干部分和的图形如下图形.



这里 $f(x) = \mathrm{sgn}x$，S_1 = 级数第一项，S_2 = 级数前两项之和.

现令 $x = \frac{\pi}{2}$，有

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 1,$$

于是莱布尼兹级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

在指定区间把下列函数展开成傅里叶级数(2939 ～ 2951).

【2939】 $f(x)=\begin{cases}A, & 若 0<x<l;\\ 0, & 若 l<x<2l.\end{cases}$
其中 A 为常数,在区间$(0,2l)$.

解 由

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{l}\int_0^l A\mathrm{d}x=A,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{l}\int_0^l A\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=0,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{1}{l}\int_0^l A\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{A}{n\pi}[1-(-1)^n].$$

由展开定理,$f(x)$ 可展开为

$$\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\frac{\pi x}{l}$$

$$=\begin{cases}A, & 0<x<l,\\ \frac{A}{2}, & x=l,\\ 0, & l<x<2l.\end{cases}$$

【2940】 $f(x)=x$,在区间$(-\pi,\pi)$.

解 由 $f(x)=x$ 知 $f(x)$ 为奇函数,有

$$a_0=a_n=0,$$

且
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{2}{n},$$

由展开定理,$f(x)$ 可展开为

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}=x,x\in(-\pi,\pi).$$

【2941】 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$,在区间$(0,2\pi)$.

解 由

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\left(\pi x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi-x}{2n\pi}\sin nx\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\pi-x}{2n\pi}\cos nx\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}.$$

于是由展开定理，$f(x)$ 可展开为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2},x\in(0,2\pi).$$

【2942】 $f(x)=|x|$，在区间$(-\pi,\pi)$.

解 因为 $f(x)=|x|$ 为偶函数，于是 $b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{n\pi}x\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1].$$

于是由展开定理，$f(x)$ 可展开为

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}=|x|,x\in(-\pi,\pi).$$

【2943】 $f(x)=\begin{cases}ax, & 若-\pi<x<0;\\ bx, & 若 0<x<\pi,\end{cases}$

其中 a 与 b 为常数，在区间$(-\pi,\pi)$.

解 由

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}ax\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}bx\,\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} ax\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} bx\cos nx\,dx$$

$$= \frac{a-b}{n^2\pi}[1-(-1)^n],$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} ax\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} bx\sin nx\,dx$$

$$= \frac{a+b}{n}(-1)^{n+1}.$$

于是由展开定理，$f(x)$ 可展开为

$$\frac{b-a}{4}\pi + \frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

$$+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

$$= \begin{cases} ax, & -\pi < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ bx, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

【2944】 $f(x) = \pi^2 - x^2$，在区间$(-\pi,\pi)$.

解 因为 $f(x) = \pi^2 - x^2$ 为偶函数，于是 $b_n = 0$，且

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\pi^2 x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{4\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\cos nx\,dx$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}x^2\sin nx\Big|_0^{\pi} + \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx$$

$$= -\frac{4}{n^2\pi}x\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$= \frac{4}{n^2}(-1)^{n+1}.$$

于是由展开定理，$f(x)$ 可展开为

$$\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$
$$=\pi^2-x^2,x\in(-\pi,\pi).$$

【2945】 $f(x)=\cos ax$，在区间$(-\pi,\pi)$（a 为非整数）.

解 因为 $f(x)=\cos ax$ 为偶函数，于是 $b_n=0$，又

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\,dx=\frac{2}{a\pi}\sin a\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\cos nx\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(n+a)x+\cos(n-a)x]dx$$
$$=\frac{2\sin a\pi}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}a}{n^2-a^2},$$

从而由展开定理，$f(x)$ 可展开为

$$\frac{2\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a\cos nx}{n^2-a^2}\right]=\cos ax,$$
$$x\in(-\pi,\pi).$$

【2946】 $f(x)=\sin ax$，在区间$(-\pi,\pi)$（a 为非整数）.

解 因为 $f(x)=\sin ax$ 为奇函数，从而 $a_0=a_n=0$，又

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin ax\sin nx\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(n-a)x-\cos(n+a)x]dx$$
$$=\frac{2\sin a\pi}{x}\cdot\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2-a^2},$$

从而由展开定理有

$$\frac{2\sin a\pi}{n}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n\sin nx}{n^2-a^2}=\sin ax,x\in(-\pi,\pi).$$

【2947】 $f(x)=\text{sh}ax$，在区间$(-\pi,\pi)$.

解 因为 $f(x)$ 为奇函数，于是 $a_0=a_n=0$，又

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\text{sh}ax\sin nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\text{sh}ax\cos nx\Big|_0^\pi + \frac{a}{n}\int_0^\pi \cos nx\,\text{ch}ax\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\text{sh}a\pi + \frac{a}{n^2}\text{ch}ax\sin nx\Big|_0^\pi\right.$$

$$\left.-\frac{a^2}{n^2}\int_0^\pi \text{sh}ax\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\text{sh}a\pi - \frac{a^2}{n^2}b_n,$$

故 $$b_n = \frac{(-1)^{n+1}2n}{(n^2+a^2)\pi}\text{sh}a\pi,$$

从而由展开定理有

$$\frac{2\text{sh}a\pi}{n}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{n^2+a^2} = \text{sh}ax, x\in(-\pi,\pi).$$

【2948】 $f(x) = e^{ax}$,在区间$(-h,h)$.

解 由

$$a_0 = \frac{1}{h}\int_{-h}^{h} e^{ax}dx = \frac{1}{ah}(e^{ah}-e^{-ah}) = \frac{2}{ah}\text{sh}ah,$$

$$a_n = \frac{1}{h}\int_{-h}^{h} e^{ax}\cos\frac{n\pi x}{h}dx$$

$$= \frac{1}{h}\frac{a\cos\frac{n\pi x}{h}+\frac{n\pi}{h}\sin\frac{n\pi x}{h}}{a^2+\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}e^{ax}\Big|_{-h}^{h}$$

$$= \frac{(-1)^n 2ah}{(ah)^2+(n\pi)^2}\text{sh}ah,$$

$$b_n = \frac{1}{h}\int_{-h}^{h} e^{ax}\sin\frac{n\pi x}{h}dx$$

$$= \frac{1}{h}\frac{a\sin\frac{n\pi x}{h}-\frac{n\pi}{h}\cos\frac{n\pi x}{h}}{a^2+\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}e^{ax}\Big|_{-h}^{h}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}2n\pi}{(ah)^2+(n\pi)^2}\text{sh}ah,$$

于是由展开定理有

$$2\operatorname{sh}ah\left[\frac{1}{2ah}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{ah\cos\frac{n\pi x}{h}-n\pi\sin\frac{n\pi x}{h}}{(ah)^2+(n\pi)^2}\right]=e^{ax},$$

$$x\in(-h,h).$$

【2949】 $f(x)=x$,在区间$(a,a+2l)$.

解 因为

$$a_0=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l}x\,dx=2(a+l),$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l}x\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{1}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{l}\bigg|_a^{a+2l}-\frac{1}{n\pi}\int_a^{a+2l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{2l}{n\pi}\sin\frac{n\pi a}{l},$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l}x\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=-\frac{1}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{l}\bigg|_a^{a+2l}+\frac{1}{n\pi}\int_a^{a+2l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=-\frac{2l}{n\pi}\cos\frac{n\pi a}{l},$$

于是由展开定理,有

$$a+l+\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\right.$$

$$\left.-\cos\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)=x,x\in(a,a+2l).$$

【2950】 $f(x)=x\sin x$,在区间$(-\pi,\pi)$.

解 由于 $f(x)=x\sin x$ 为偶函数,于是 $b_n=0$,又

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-x\cos x\bigg|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx\right)=2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x[\sin(n+1)x - \sin(n-1)x]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{x\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2}$$

$$+ \frac{x\cos(n-1)x}{n-1} - \frac{\sin(n-1)x}{(n-1)^2}\Big]\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}, n = 2,3,\cdots,$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin 2x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x\Big]\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2},$$

从而由展开定理有

$$1 - \frac{1}{2}\cos x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx = x\sin x,$$

$$x \in (-\pi,\pi).$$

【2951】 $f(x) = x\cos x$,在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

解 因为 $f(x)$ 为奇函数,于是 $a_0 = a_n = 0$,又

$$b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\sin 2nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x[\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big[-\frac{x\cos(2n+1)x}{2n+1} + \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

$$-\frac{x\cos(2n-1)x}{2n-1} + \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}\Big]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}16}{\pi}\cdot\frac{n}{(4n^2-1)^2},$$

从而由展开定理有

$$\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx = x\cos x, x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

把下列周期函数展开成傅里叶级数(2952 ~ 2959).

【2952】 $f(x) = \mathrm{sgn}(\cos x)$.

解 由

$$f(x+2\pi) = \mathrm{sgn}[\cos(x+2\pi)] = \mathrm{sgn}(\cos x) = f(x),$$

知,$f(x)$ 以 2π 为周期的周期函数,又 $f(x)$ 为偶函数,于是 $b_n = 0$,

又
$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{sgn}(\cos x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-1)\mathrm{d}x\right) = 0,$$

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{sgn}(\cos x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} \\ &= \begin{cases}0, & n\text{ 为偶数}, \\ (-1)^k\dfrac{4}{(2k+1)\pi}, & n = 2k+1, k = 0,1,2,\cdots.\end{cases}\end{aligned}$$

从而由展开定理,$f(x)$ 在$(-\pi,\pi)$ 上可展开为

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^k\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}\right] = \mathrm{sgn}(\cos x).$$

又上式在 $f(x)$ 的不连续点 $x = -\frac{\pi}{2}$ 和 $x = \frac{\pi}{2}$ 也成立,事实上,在这些点满足

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)],$$

于是,$\forall x \in (-\infty, +\infty)$,上述展式皆成立.

【2953】 $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

解 易知 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续周期函数,且 $f(x)$ 在$(-\pi,\pi)$ 内为一奇函数,于是 $a_0 = a_n = 0$,又

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\arcsin(\sin x)\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nx\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\left(-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{n}\cos nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x}{n}\cos nx-\frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]$$

$$=\frac{4}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数},\\ (-1)^k\dfrac{4}{\pi(2k+1)^2}, & n=2k+1,k=0,1,2,\cdots.\end{cases}$$

从而由展开定理有

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x=\arcsin(\sin x),$$

$$x\in(-\infty,+\infty).$$

【2954】 $f(x)=\arcsin(\cos x)$.

解 由 $f(x)$ 为偶函数知 $b_n=0$,又 $f(x)$ 以 2π 为周期的连续函数,于是

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\arcsin(\cos x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=0,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\arcsin(\cos x)\cos nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n}\sin nx-\frac{x}{n}\sin nx-\frac{1}{n^2}\cos nx\right]\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}[1-(-1)^n]$$

$$=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数},\\ \dfrac{4}{(2k+1)^2\pi}, & n=2k+1,k=0,1,2,\cdots.\end{cases}$$

从而由展开定理有

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}=\arcsin(\cos x),x\in(-\infty,+\infty).$$

【2955】 $f(x)=x-[x]$.

解 因为

$$f(x+1)=x+1-[x+1]=x+1-[x]-1$$
$$=x-[x]=f(x),$$

于是 $f(x)$ 以 1 为周期. 且除 $x=k$(k 为整数) 外,$f(x)$ 皆连续.

由 $$a_0=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1\{x-[x]\}\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\mathrm{d}x=1,$$

$$a_n=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1\{x-[x]\}\cos2n\pi x\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\cos2n\pi x\mathrm{d}x$$
$$=2\left[\frac{x}{2n\pi}\sin2n\pi x+\frac{1}{4(n\pi)^2}\cos2n\pi x\right]\Bigg|_0^1=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1\{x-[x]\}\sin2n\pi x\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\sin2n\pi x\mathrm{d}x$$
$$=2\left[-\frac{x}{2n\pi}\cos2n\pi x+\frac{1}{4(n\pi)^2}\sin2n\pi x\right]\Bigg|_0^1$$
$$=-\frac{1}{n\pi},$$

于是按展开定理有

$$x-[x]=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin2n\pi x}{n},$$
$$x\neq k,k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

【2956】 $f(x)=(x)$,其中(x) 为 x 到与它最近的整数的距离.

解 $f(x)$ 是以 1 为周期的连续函数,由

$$a_0=2\int_0^1(x)\mathrm{d}x=2\left[\int_0^{\frac{1}{2}}x\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x)\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{2},$$

$$a_n = 2\int_0^1 (x)\cos 2n\pi x\,dx$$

$$= 2\left[\int_0^{\frac{1}{2}} x\cos 2n\pi x\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)\cos 2n\pi x\,dx\right]$$

$$= 2\left\{\left[\frac{x}{2n\pi}\sin 2n\pi x + \frac{1}{4(n\pi)^2}\cos 2n\pi x\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$+ \left[\frac{1}{2n\pi}\sin 2n\pi x - \frac{x}{2n\pi}\sin 2n\pi x\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{4(n\pi)^2}\cos 2n\pi x\right]\Bigg|_{\frac{1}{2}}^1\right\}$$

$$= \frac{1}{(n\pi)^2}[(-1)^n - 1]$$

$$= \begin{cases} 0, & n\text{为偶数}, \\ -\dfrac{2}{\pi^2}\cdot\dfrac{1}{(2k+1)^2}, & n = 2k+1(k = 0,1,2,\cdots). \end{cases}$$

$$b_n = 2\left[\int_0^{\frac{1}{2}} x\sin 2n\pi x\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)\sin 2n\pi x\,dx\right]$$

$$= 2\left\{\left[-\frac{x}{2n\pi}\cos 2n\pi x + \frac{1}{4(n\pi)^2}\sin 2n\pi x\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$+ \left[-\frac{1}{2n\pi}\cos 2n\pi x + \frac{x}{2n\pi}\cos 2n\pi x\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{4(n\pi)^2}\sin 2n\pi x\right]\Bigg|_{\frac{1}{2}}^1\right\}$$

$$= 0.$$

从而由展开定理有

$$\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos 2\pi(2k+1)x}{(2k+1)^2} = (x), x \in (-\infty, +\infty).$$

【2957】 $f(x) = |\sin x|$.

解 $f(x)$ 以 π 为周期的连续函数，且 $f(x)$ 为偶函数，于是 $b_n = 0$，又

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{4}{\pi},$$

$$a_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\cos 2nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)x+\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{4}{\pi}\frac{1}{4n^2-1},$$

从而由展开定理有

$$\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}=|\sin x|,x\in(-\infty,+\infty).$$

【2958】 $f(x)=|\cos x|$.

解 由 $f(x)=|\cos x|=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|$

知,依据 2957 题有

$$|\cos x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{4n^2-1}$$

$$=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos 2nx}{4n^2-1}$$

$$=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1},$$

$$x\in(-\infty,+\infty).$$

【2959】 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha^n\frac{\sin nx}{\sin x}\quad(|\alpha|<1)$.

解 当 $x=k\pi,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时,

$$\lim_{x\to k\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}=\lim_{x\to k\pi}\frac{n\cos nx}{\cos x}=n(-1)^{(n-1)k},$$

对于函数 $p_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sin x}$,

当 $x=k\pi$,其值定义为极限值,于是 $p_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,且 $p_n(x)$ 以 2π 为周期的函数,并且为偶函数. 又

$$p_n(x)=\frac{\sin nx}{\sin x}$$
$$=\frac{\sin(n-1)x\cos x+\cos(n-1)x\sin x}{\sin x}$$
$$=p_{n-1}(x)\cos x+\cos(n-1)x,$$

有 $$|p_n(x)|\leqslant|p_{n-1}(x)|+1,$$
$$x\in(-\infty,+\infty),n=2,3,\cdots.$$

又 $p_1(x)=1$，于是利用归纳法知

$$|p_n(x)|\leqslant n,x\in(-\infty,+\infty),n=1,2,\cdots.$$

从而 $$\left|\alpha^n\frac{\sin nx}{\sin x}\right|\leqslant n|\alpha|^n,x\in(-\infty,+\infty),n=1,2,\cdots.$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n|\alpha|^n$ 收敛(因为 $|\alpha|<1$)，于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha^n\left|\frac{\sin nx}{\sin x}\right|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛. 从而 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha^n\frac{\sin nx}{\sin x}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，且在任何有限区间上皆可逐项积分.

由 $f(x)$ 以 2π 为周期，且为偶函数，有 $b_n=0$，又

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\frac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2}{\pi}\left[\sum_{n=2,4,\cdots}\alpha^n\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x+\sum_{n=1,3,\cdots}\alpha^n\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x\right]$$
$$=2\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{2k+1}=\frac{2\alpha}{1-\alpha},\text{(2291 题结论)}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha^m\int_0^{\pi}\frac{\sin mx\cos nx}{\sin x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\alpha^m\int_0^{\pi}\frac{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x}{\sin x}\mathrm{d}x$$
$$=I_1+I_2,$$

其中 $$I_1=\frac{1}{\pi}\sum_{m\leqslant n}\alpha^m\int_0^{\pi}\frac{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x}{\sin x}\mathrm{d}x,$$

$$I_2=\frac{1}{\pi}\sum_{m>n}\alpha^m\int_0^{\pi}\frac{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x}{\sin x}\mathrm{d}x.$$

当 $m\leqslant n$ 时，I_1 中各积分皆为零，于是 $I_1=0$；当 $m>n$ 时，若 $m+n,m-n$ 为偶数，则 I_2 中的对应的积分为零，若 $m+n,m-n$ 为奇数，则 I_2 中对应的积分等于 2π. 于是

$$I_2=2\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{(2k+1)+n}=2\frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha^2},a_n=I_2.$$

从而由展开定理，$f(x)$ 的展开式为

$$f(x)=\frac{\alpha}{1-\alpha^2}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\cos nx\right),\ x\in(-\infty,+\infty).$$

【2960】 把以下函数展开成傅里叶级数：

$$f(x)=\sec x\qquad\left(-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}\right).$$

解 $f(x)=\sec x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 内连续，且是偶函数，于是 $b_n=0$. 又

$$a_0=\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\mathrm{d}x=\frac{8}{\pi}\left[\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{8}{\pi}\left[\ln\left|\frac{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right|\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{8}{\pi}\left[\ln\left|\frac{1-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{8}{\pi}\left[\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{2}),$$

又 $\qquad\cos 4nx-\cos(4nx-4x)$

$$=-2\sin(4nx-2x)\sin 2x$$
$$=-4\sin(4nx-2x)\sin x\cos x$$
$$=2[\cos(4nx-x)-\cos(4nx-3x)]\cos x,$$

有 $$a_n=\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 4nx}{\cos x}\mathrm{d}x \qquad (n=1,2,\cdots)$$
$$=\frac{16}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\cos(4n-1)x-\cos(4n-3)x]\mathrm{d}x$$
$$+\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 4(n-1)x}{\cos x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{16}{\pi}\left[\frac{1}{4n-1}\sin\left(n\pi-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4n-3}\sin\left(n\pi-\frac{3}{4}\pi\right)\right]+a_{n-1}$$
$$=\frac{16}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{4n-1}\sin\frac{\pi}{4}-\frac{(-1)^{n-1}}{4n-3}\sin\frac{3\pi}{4}\right]+a_{n-1}$$
$$=\frac{16}{\pi}(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-1}\right)+a_{n-1}$$
$$=\frac{16}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}(-1)^n}{(4n-3)(4n-1)}+a_{n-1},$$

于是 $$a_n=\frac{16\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(4k-3)(4k-1)}+a_0$$
$$=\frac{16\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(4k-3)(4k-1)}$$
$$+\frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{2}),n=1,2,\cdots.$$

从而有如下展式

$$\sec x=\frac{4}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})\right.$$
$$\left.-\frac{16\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{(4k-3)(4k-1)}\right]\cos 4nx,$$
$$x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right).$$

【2961】 把函数 $f(x)=x^2$ 展开成傅里叶级数：

(1) 在区间 $(-\pi,\pi)$ 按余弦展开；

(2) 在区间$(0,\pi)$ 按正弦展开;

(3) 在区间$(0,2\pi)$ 展开.

作出函数图形及(1)、(2) 和(3) 中傅里叶级数的和的图形.

利用这些展开式求下列级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\text{ 和}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

解 (1) 由 $f(x)$ 为偶函数知 $b_n=0$,又

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$=(-1)^n\frac{4}{n^2}.$$

于是 $f(x)$ 在$(-\pi,\pi)$ 上按余弦展开为

$$\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx=x^2,x\in[-\pi,\pi].$$

(2) 由于 $a_0=a_n=0$,又

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx+\frac{2}{n^2}x\sin x+\frac{2}{n^3}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}+\frac{4}{n^3\pi}[(-1)^n-1],$$

有 $f(x)$ 在$[0,\pi]$ 上按正弦展开是

$$2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}$$
$$=x^2,x\in[0,\pi].$$

(3) 由

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{8\pi^2}{3}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx \, dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx + \frac{2x}{n^2}\cos nx - \frac{2}{n^3}\sin nx\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2},$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx \, dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx + \frac{2x}{n^2}\sin nx + \frac{2}{n^3}\cos nx\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{n},$$

有 $f(x)$ 在$(0,2\pi)$ 上的展式是

$$\frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = x^2, x \in (0,2\pi).$$

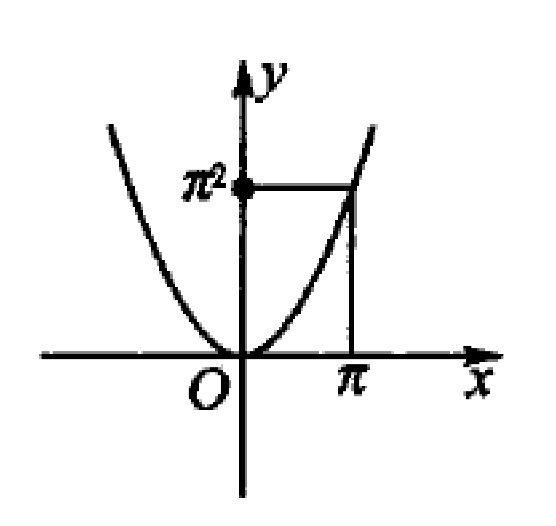


图 1

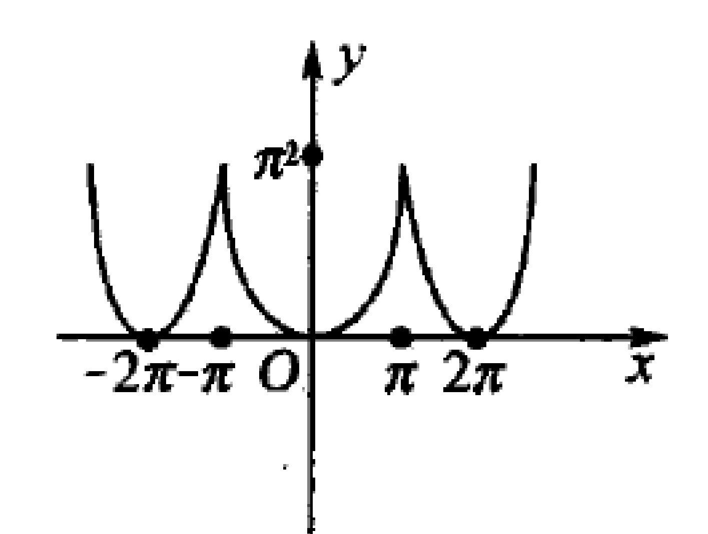


图 2

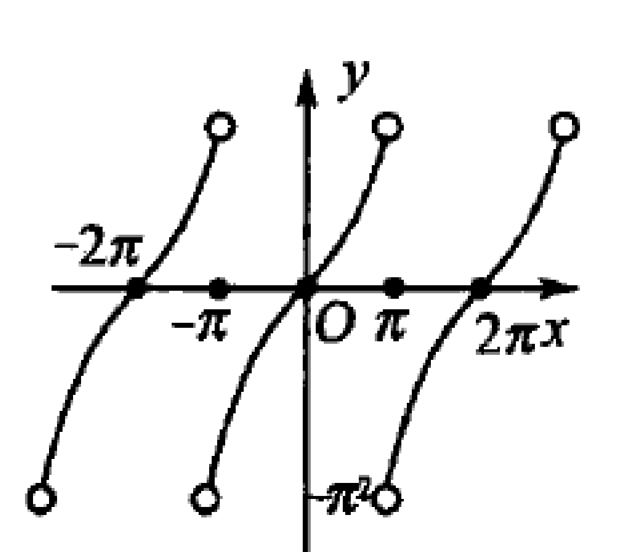


图 3

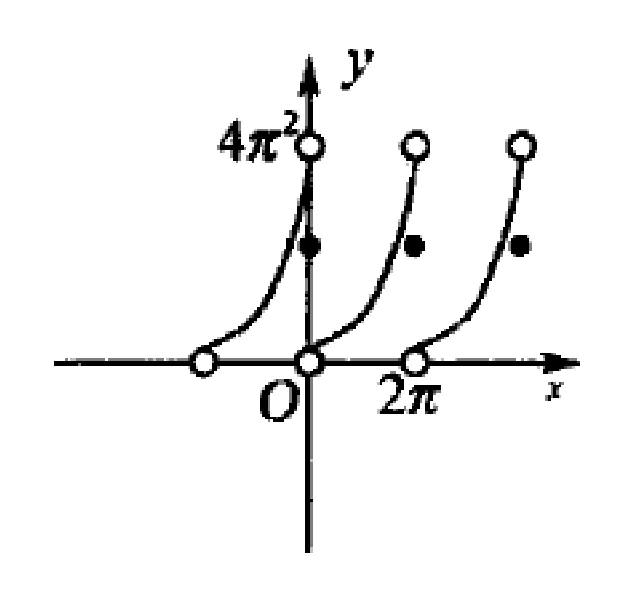


图 4

现在展式 ① 中令 $x = \pi$，有

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cdot(-1)^n = \pi^2.$$

于是 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$ ①

若在展式 ② 中令 $x = \pi$，则

$$\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\pi^2,$$

于是
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}. \qquad ②$$

将级数 ① + ②，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right]=\frac{\pi^2}{4},$$

即
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}. \qquad ③$$

【2962】 根据展开式：

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} \qquad (-\pi<x<\pi).$$

用逐项积分法求函数 x^2，x^3 和 x^4 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内的傅里叶级数.

解 对等式两边在 $[0,x]$ 上积分有

$$\frac{x^2}{2}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx-1}{n^2},$$

又
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12},$$

于是我们有

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2},x\in(-\pi,\pi). \qquad ①$$

将 ① 式在 $[0,x]$ 上逐项积分，又

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,$$

我们有
$$x^3=2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^3},$$
$$x\in(-\pi,\pi), \qquad ②$$

于是
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n^3}=\frac{\pi^2x-x^3}{12},x\in[-\pi,\pi].$$

将上式从 0 到 x 积分有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx-1}{n^4}=\frac{2\pi^2x^2-x^4}{48},x\in[-\pi,\pi].$$

令 $x=\pi$ 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1-(-1)^n}{n^4}=\frac{\pi^4}{48}.$$

于是有 $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.\qquad ③$$

又级数 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\qquad ④$$

收敛,设其和为 S,由 ③ − ④ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}=S-\frac{\pi^4}{96},$$

即 $$\frac{S}{16}=S-\frac{\pi^4}{96}.$$

从而 $$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

将 ② 式从 $-\pi$ 到 x 积,且以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi}{6},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90},$$

代入有 $$\frac{x^4}{4}-\frac{\pi^4}{4}=2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}-2\pi^2\cdot\frac{\pi^2}{6}+12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^4}+12\cdot\frac{\pi^4}{90}.$$

也就是 $$x^4=\frac{\pi^4}{5}+8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}+48\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^4},x\in[-\pi,\pi].$$

【2963】 写出函数

$$f(x)\begin{cases}1,当\ |x|<\alpha\ 时;\\0,当\ \alpha<|x|<\pi\ 时\end{cases}$$的李雅普诺夫等式.

根据李雅普诺夫等式求下列级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}\ 与\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}.$$

解　因为 $f(x)$ 为偶函数，于是 $b_n = 0$，且

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha} \mathrm{d}x = \frac{2\alpha}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha} \cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{2\sin n\alpha}{n\pi},$$

又　$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{2\alpha}{\pi}.$$

从而 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上展开的李雅普诺夫等式为

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{2\alpha^2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{2\alpha}{\pi}.$$

故　$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} = \frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}.$$

由 2961 题知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2} = \frac{\pi^2 - 3\pi\alpha + 3\alpha^2}{6}.$$

【2964】　把下列函数展开成傅里叶级数：

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1, & \text{若 } 1 < x < 2; \\ 3-x, & \text{若 } 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

解　$f(x)$ 在$[0,3]$上按周期为3作傅里叶展开，于是 $f(x)$ 的延拓(周期为 3) 是偶函数，从而 $b_n = 0$，又

$$a_0 = \frac{1}{\frac{3}{2}}\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 x\mathrm{d}x + \frac{2}{3}\int_1^2 \mathrm{d}x + \frac{2}{3}\int_2^3 (3-x)\mathrm{d}x = \frac{4}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^1 x\cos\frac{2n\pi x}{3}\mathrm{d}x + \frac{2}{3}\int_1^2 \cos\frac{2n\pi x}{3}\mathrm{d}x$$

$$+ \frac{2}{3}\int_2^3 (3-x)\cos\frac{2n\pi x}{3}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}\left\{\left[\frac{3}{2n\pi}x\sin\frac{2n\pi x}{3}+\frac{9}{4n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}\right]\Big|_0^1\right.$$

$$+\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}\Big|_1^2+\left[\frac{9}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{3}{2n\pi}x\sin\frac{2n\pi x}{3}-\frac{9}{4n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}\right]\Big|_2^3\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\left[-\frac{9}{2(n\pi)^2}+\frac{9}{4(n\pi)^2}\left(\cos\frac{2n\pi}{3}+\cos\frac{4n\pi}{3}\right)\right]$$

$$=-\frac{3}{(n\pi)^2}+\frac{3}{(n\pi)^2}(-1)^n\cos\frac{n\pi}{3},$$

于是由展开定理，$f(x)$ 在$[0,3]$ 可按余弦展开为

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi}{3}\right]\cos\frac{2n\pi x}{3}=f(x).$$

又
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi}{3}\right]\cos\frac{2n\pi x}{3}$$

$$=\left(-\frac{1}{1^2}-\frac{1}{1^2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cos\frac{2\pi x}{3}+\left(-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cos\frac{4\pi x}{3}$$

$$+\left(-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}\right)\cos 2\pi x+\left(-\frac{1}{4^2}-\frac{1}{4^2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cos\frac{8\pi x}{3}$$

$$+\left(-\frac{1}{5^2}-\frac{1}{5^2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cos\frac{10\pi x}{3}$$

$$+\left(-\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^2}\right)\cos 4\pi x+\cdots$$

$$=-\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2n\pi x,$$

因而 $f(x)$ 的余弦展开式为

$$f(x)=\frac{2}{3}-\frac{9}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2n\pi x,$$

$$x\in[0,3].$$

利用以下公式：

$$\cos x=\frac{1}{2}(t+\bar{t}),\sin x=\frac{1}{2i}(t-\bar{t}).$$

其中 $t=e^{ix}$ 与 $\bar{t}=e^{-ix}$，得出以下函数傅里叶级数的展开式(2965～2969).

【2965】 $\cos^{2m}x$，(m 为正整数).

解 $\cos^{2m}x$

$$=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^{2m}=\frac{1}{2^{2m}}\sum_{l=0}^{2m}C_{2m}^{l}e^{(2m-l)ix}e^{-lix}$$

$$=\frac{1}{2^{2m}}C_{2m}^{m}+\frac{1}{2^{2m}}\left(\sum_{l=0}^{m-1}+\sum_{l=m+1}^{2m}\right)C_{2m}^{l}e^{2(m-l)ix}$$

$$=\frac{1}{2^{2m}}C_{2m}^{m}+\frac{1}{2^{2m}}\left[\sum_{l=0}^{m-1}C_{2m}^{l}e^{2(m-l)ix}+\sum_{l'=0}^{m-1}C_{2m}^{2m-l'}e^{-2(m-l')ix}\right]$$

$$=\frac{1}{2^{2m}}C_{2m}^{m}+\frac{1}{2^{2m}}\sum_{s=0}^{m-1}C_{2m}^{s}\left[e^{2(m-s)ix}+e^{-2(m-s)ix}\right]$$

$$=\frac{1}{2^{2m}}C_{2m}^{m}+\frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{s=0}^{m-1}C_{2m}^{s}\cos 2(m-s)x$$

$$=\frac{1}{2^{2m}}C_{2m}^{m}+\frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{k=1}^{m}C_{2m}^{m-k}\cos 2kx,$$

因为上述表达式为一三角多项式，于是在$(-\infty,+\infty)$上的傅里叶展开式即为本身.

【2966】 $\dfrac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$ $(|q|<1)$.

解 $$\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}=\frac{\frac{q}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})}{1-q(e^{ix}+e^{-ix})+q^2}$$

$$=\frac{1}{2i}\,\frac{q(e^{ix}-e^{-ix})}{(1-qe^{ix})(1-qe^{-ix})}$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-qe^{ix}}-\frac{1}{1-qe^{-ix}}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\left[(1+qe^{ix}+q^2e^{2ix}+\cdots)\right.$$
$$\left.-(1+qe^{-ix}+q^2e^{-2ix}+\cdots)\right]$$

$$=q\sin x+q^2\sin 2x+\cdots,$$

而级数 $q\sin x+q^2\sin 2x+\cdots+q^n\sin nx+\cdots$，在$(-\infty,+\infty)$上一

致收敛. 事实上 $|q^n\sin nx|\leqslant q^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n(|q|<1)$ 收敛, 于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n\sin nx$ 在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛. 于是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin nx=\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2},x\in(-\infty,+\infty).$$

即为傅里叶展开式.

【2967】 $\dfrac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^3}\quad(|q|<1).$

解
$$\begin{aligned}\frac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2}&=\frac{1-q^2}{1-q(e^{ix}+e^{-ix})+q^2}\\&=(1-q^2)\frac{1}{(1-qe^{ix})(1-qe^{-ix})}\\&=-1+\frac{1}{1-qe^{ix}}+\frac{1}{1-qe^{-ix}}\\&=-1+(1+qe^{ix}+q^2e^{2ix}+\cdots)\\&\quad+(1+qe^{-ix}+q^2e^{-2ix}+\cdots)\\&=1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^n\cos nx,\end{aligned}$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n\cos nx$ 在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛, 因而$\dfrac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2}$的傅里叶展开式为

$$\frac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^n\cos nx.$$

【2968】 $\dfrac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}\quad(|q|<1).$

解
$$\begin{aligned}\frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}&=\frac{1-\frac{q}{2}(e^{ix}+e^{-ix})}{1-q(e^{ix}+e^{-ix})+q^2}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2-qe^{ix}-qe^{-ix}}{(1-qe^{ix})(1-qe^{-ix})}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-qe^{ix}}+\frac{1}{1-qe^{-ix}}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}[(1+qe^{ix}+q^2e^{2ix}+\cdots)$$

$$+(1+qe^{-ix}+q^2e^{-2ix}+\cdots)]$$

$$=1+q\cos x+q^2\cos 2x+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos nx,$$

又上式右端级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，于是$\frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}$的傅里叶级数为

$$\frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos nx, x\in(-\infty,+\infty).$$

【2969】 $\ln(1-2q\cos x+q^2)$ $(|q|<1)$.

解 因为

$$1-2q\cos x+q^2\geqslant 1-2q+q^2=(1-q)^2>0,$$

于是$\ln(1-2q\cos x+q^2)$是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，且是周期为2π的偶函数，对该函数关于x求导，且利用2966题结论有

$$[\ln(1-2q\cos x+q^2)]'$$

$$=\frac{2q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}=2\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin nx, x\in(-\infty,+\infty).$$

对上式从0到x积分(因为上式级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，故可逐项积分)，则有

$$\ln(1-2q\cos x+q^2)$$

$$=\int_0^x\frac{2q\sin t}{1-2q\cos t+q^2}dt+2\ln(1-q)$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x q^n\sin nt\,dx+2\ln(1-q)$$

$$=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}\cos nx+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}+2\ln(1-q),$$

又 $$\ln(1-q)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}.$$

于是 $$\ln(1-2q\cos x+q^2)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}\cos nx,$$

$$x\in(-\infty,+\infty).$$

因为上式右端级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，于是上式即是左端函数的傅里叶的级数.

把无界周期函数展开成傅里叶级数(2970 ~ 2972).

【2970】 $f(x)=\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$.

解 $f(x)$以2π为周期的周期函数，当$x=2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时函数有无穷个不连续点，因为$f(x)$是偶函数，于是$b_n=0$，又

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\ln2\right)\qquad\text{(2353 题的结论)}$$

$$=-2\ln2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{n\pi}\sin nx\ln\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x+\sin(n-\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\mathrm{d}t-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n-1)t}{\sin t}\mathrm{d}t,\quad①$$

由 2291 题结论知

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x=\pi,(n=0,1,2\cdots).$$

于是 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x=\pi.$$

令 $$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x,$$

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x,$$

有
$$I_2 \xlongequal[x=\pi-u]{\text{令 }\pi-x=u} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin(2n+1)(\pi-u)}{\sin(\pi-u)}du$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}du = I_1,$$

从而
$$\frac{\pi}{2} = I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx,$$

代入 ① 式有
$$a_n = -\frac{1}{n}, \qquad (n=1,2,\cdots).$$

由 $f(x)=\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上绝对可积：
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx = 2\int_0^{\pi} \left|\ln\sin\frac{x}{2}\right|dx$$
$$=-2\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}dx = 2\pi\ln 2 < +\infty.$$

又除去 $x=2k\pi(k=0,\pm1\pm2\cdots)$ 诸点外，在其他点 $f(x)$ 皆可微，根据傅里叶级数的李普希兹判别法知，除上述各点外，$f(x)$ 的傅里叶级数收敛于 $f(x)$ 本身，即
$$\ln\left|\frac{\sin x}{2}\right| = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n},$$
$$x\neq 2k\pi, k=0,\pm1,\pm2\cdots.$$

【2971】 $f(x)=\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|$.

解 由 2970 题结论有
$$\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \ln\left|\sin\frac{\pi-x}{2}\right|$$
$$=-\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(\pi-x)}{n}$$
$$=-\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cos nx,$$
$$x\neq(2m+1)\pi, m=0,\pm1\pm2\cdots.$$

【2972】 $f(x)=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$.

解 由 2970 和 2971 题结论知

$$\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| = \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| - \ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|$$

$$= \left[-\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}\right] - \left[-\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cos nx\right]$$

$$= -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}, x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2\cdots.$$

【2973】 把下列函数展开成傅里叶级数:

$$f(x) = \int_0^x \ln\sqrt{\left|\cot\frac{t}{2}\right|}\,dt \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

解 将函数对 x 求导,并利用 2972 题结论有

$$f'(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\cot\frac{x}{2}\right| = -\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}.$$

又 $$f'(x) = -\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|,$$

在$(-\pi,\pi)$内绝对可积,有

$$\int_0^x \ln\sqrt{\left|\cot\frac{t}{2}\right|}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2}, \quad x \in (-\pi,\pi).$$

【2974】 函数

$$x = x(s), y = y(s) \qquad (0 \leqslant s \leqslant 4a).$$

是正方形周边 $0 < x < a, 0 < y < a$ 的参数表达式,其中 s 为逆时针方向从 $O(0,0)$ 点算起的弧长,把这些函数展开成傅里叶级数.

解 由定义,$x(s)$ 的表达式为

$$x(s) = \begin{cases} s, & 0 \leqslant s \leqslant a, \\ a, & a \leqslant s \leqslant 2a, \\ 3a - s, & 2a \leqslant s \leqslant 3a, \\ 0, & 3a \leqslant s \leqslant 4a. \end{cases}$$

于是 $x(s)$ 在$[0,4a]$上的傅里叶级数展开为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi s}{2a}+b_n\sin\frac{n\pi s}{2a}),$$

其中 $$a_0=\frac{1}{2a}\int_0^{4a}x(s)\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\int_0^a s\mathrm{d}s+\int_a^{2a}a\,\mathrm{d}s+\int_{2a}^{3a}(3a-s)\mathrm{d}s\right]=a,$$

$$a_n=\frac{1}{2a}\int_0^{4a}x(s)\cos\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\int_0^a s\cos\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s+\int_a^{2a}a\cos\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s\right.$$

$$\left.+\int_{2a}^{3a}(3a-s)\cos\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\left\{\left[\frac{2a^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+(\frac{2a^2}{n\pi})(\cos\frac{n\pi}{2}-1)\right]\right.$$

$$+\left[-\frac{2a^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]+\left[\left(\frac{6a^2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2}\right)\right.$$

$$\left.\left.-\frac{6a^2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2}-\left(\frac{2a^2}{n\pi}\right)\left(\cos\frac{3n\pi}{2}-\cos n\pi\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{2a}{(n\pi)^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1-\cos\frac{3n\pi}{2}+\cos n\pi\right)$$

$$=\begin{cases}0, & x=2k,\\ -\dfrac{4a}{\pi^2(2k+1)^2}, & n=2k+1.\end{cases}$$

其中,$k=0,1,2\cdots$.

$$b_n=\frac{1}{2a}\int_0^{4a}x(s)\sin\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\int_0^a s\sin\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s+\int_a^{2a}a\ \sin\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s\right.$$

$$\left.+\int_{2a}^{3a}(3a-s)\sin\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\left\{\left[-\frac{2a^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+(\frac{2a}{n\pi})^2\sin\frac{n\pi}{2}\right]\right.$$

$$+\left[-\frac{2a^2}{n\pi}\cos n\pi+\frac{2a^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$+\left[\left(-\frac{6a^2}{n\pi}\cos\frac{3n\pi}{2}+\frac{6a^2}{n\pi}\cos n\pi\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{6\,a^2}{n\pi}\cos\frac{3n\pi}{2}-\frac{4\,a^2}{n\pi}\cos n\pi\right)+\left(-\frac{4\,a^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{3n\pi}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{2a}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{n\pi}{2}-\sin\frac{3n\pi}{2}\right)$$

$$=\begin{cases}0, & n=2k, \quad k=1,2,3\cdots,\\ \dfrac{4a\,(-1)^k}{\pi^2\,(2k+1)^2}, & n=2k+1, \quad k=0,1,2,3\cdots.\end{cases}$$

因而由展开定理且 $x(0)=x(4a)$，$x(s)$ 的傅里叶展式为

$$x(s)=\frac{a}{2}-\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi s}{2a}$$

$$+\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi s}{2a},\ s\in[0,4a].$$

类似地，$y(s)$ 的表达式为

$$y(s)=\begin{cases}0, & 0\leqslant s\leqslant a,\\ s-a, & a\leqslant s\leqslant 2a,\\ a, & 2a\leqslant s\leqslant 3a,\\ 4a-s, & 3a\leqslant s\leqslant 4a.\end{cases}$$

从而，$y(s)$ 在 $[0,4a]$ 上的傅里叶级数展开式为

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi s}{2a}+B_n\sin\frac{n\pi s}{2a}\right),$$

其中 $$A_0=\frac{1}{2a}\int_0^{4a}y(s)\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\int_a^{2a}(s-a)\mathrm{d}s+\int_{2a}^{3a}a\,\mathrm{d}s+\int_{3a}^{4a}(4a-s)\mathrm{d}s\right]$$

$$=a,$$

$$A_n=\frac{1}{2a}\int_0^{4a}y(s)\cos\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\int_a^{2a}(s-a)\cos\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s+\int_{2a}^{3a}a\ \cos\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s\right.$$

$$\left.+\int_{3a}^{4a}(4a-s)\cos\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2a}\left\{\left[\left(-\frac{2a^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{4a^2}{n^2\pi^2}\left(\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\right)\right.\right.\\
&\quad \left.-\left(-\frac{2a^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\right]+\left[\frac{2a^2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2}\right]\\
&\quad +\left[\left(-\frac{8a^2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2}\right)-\left(-\frac{6a^2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2}\right.\right.\\
&\quad \left.\left.\left.+\frac{4a^2}{n^2\pi^2}-\frac{4a^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{3n\pi}{2}\right)\right]\right\}\\
&= \frac{2a}{n^2\pi^2}\left(\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2}-1+\cos\frac{3n\pi}{2}\right)\\
&= \begin{cases} 0, & n=2k, \quad k=1,2,3\cdots,\\ \dfrac{-4a}{\pi^2(2k+1)^2}, & n=2k+1, \quad k=0,1,2,3\cdots. \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_n &= \frac{1}{2a}\int_0^{4a} y(s)\sin\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s\\
&= \frac{1}{2a}\left[\int_a^{2a}(s-a)\sin\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s+\int_{2a}^{3a}a\sin\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s\right.\\
&\quad \left.+\int_{3a}^{4a}(4a-s)\sin\frac{n\pi s}{2a}\mathrm{d}s\right]\\
&= \frac{1}{2a}\left\{\left[\left(-\frac{4a^2}{n\pi}\cos n\pi+\frac{2a^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\right.\right.\right.\\
&\quad \left.\left.-\frac{4a^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)-\left(-\frac{2a^2}{n\pi}\cos n\pi+\frac{2a^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\right)\right]\\
&\quad +\left[-\frac{2a^2}{n\pi}\cos\frac{3n\pi}{2}+\frac{2a^2}{n\pi}\cos n\pi\right]\\
&\quad +\left[\left(-\frac{8a^2}{n\pi}+\frac{8a^2}{n\pi}\cos\frac{3n\pi}{2}\right)\right.\\
&\quad \left.\left.-\left(-\frac{8a^2}{n\pi}-\frac{6a^2}{n\pi}\cos\frac{3n\pi}{2}-\frac{4a^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{3n\pi}{2}\right)\right]\right\}\\
&= \frac{2a}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{3n\pi}{2}-\sin\frac{n\pi}{2}\right)\\
&= \begin{cases} 0, & n=2k, \quad k=1,2,3\cdots,\\ \dfrac{(-1)^{k+1}4a}{\pi^2(2k+1)^2}, & n=2k+1, \quad k=0,1,2,3\cdots. \end{cases}
\end{aligned}
$$

因而由展开定理且 $y(0)=y(4a)$ 有 $y(s)$ 的傅里叶展式为

$$y(s)=\frac{a}{2}-\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi s}{2a}$$
$$+\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi s}{2a},\ s\in[0,4a].$$

【2975】 应该如何把给定在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内的可积函数 $f(x)$ 延拓到区间 $(-\pi,\pi)$，使得它的傅里叶级数展开式具有以下形式：$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)x(-\pi<x<\pi)$.

解 因为展开式中无正弦值，于是 $f(x)$ 延拓到 $(-\pi,\pi)$ 内应满足 $f(-x)=f(x)$，设 $f(x)$ 延拓到 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 的部分记为 $g(x)$ 则由题意有

$$0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nx\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}g(x)\cos 2nx\,dx$$
$$=I_1+I_2,n=0,1,2,\cdots.$$

又 $$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nx\,dx$$

$$\xrightarrow[x=\pi-y]{\text{令 }y=\pi-x}\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}f(\pi-y)\cos 2ny\,dy$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(\pi-y)\cos 2ny\,dy,$$

于是 $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[f(\pi-x)+g(x)]\cos 2nd x=0,n=0,1,2,\cdots.$$

从而任意的 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，有

$$f(\pi-x)+g(x)=0,$$

即 $$g(x)=-f(\pi-x).$$

综上所述，首先在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 内定义一个函数，使它等于 $-f(\pi-x)$，其次，再按偶函数延拓到 $(-\pi,0)$，设延拓的函数记为 $\tilde{f}(x)$. 则

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & 0<x<\frac{\pi}{2}, \\ -f(\pi-x), & \frac{\pi}{2}<x<\pi, \\ f(-x), & -\frac{\pi}{2}<x<0, \\ -f(\pi+x), & -\pi<x<-\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

【2976】 应该如何把给定在区间$(0,\frac{\pi}{2})$的可积函数$f(x)$延拓到区间$(-\pi,\pi)$，使得它的傅里叶级数展开式具有以下形式：$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin(2n-1)x(-\pi<x<\pi)$.

解 因为展式中无余弦项，于是$f(x)$延拓到$(-\pi,\pi)$内应满足$f(-x)=-f(x)$，令$f(x)$延拓到$(\frac{\pi}{2},\pi)$部分记作$g(x)$，则由题设有

$$\begin{aligned} 0&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin 2nx\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}g(x)\sin 2nx\,\mathrm{d}x \\ &=I_1+I_2,n=1,2\cdots, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} I_1&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin 2nx\,\mathrm{d}x \\ &\xlongequal[x=\pi-y]{\text{令 } y=\pi-x}\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}f(\pi-y)\sin 2ny\,\mathrm{d}y \\ &=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-f(\pi-y)\sin 2ny\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

于是，有 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[g(x)-f(\pi-x)]\sin 2nx\,\mathrm{d}x=0,n=1,2\cdots$.

从而对任意$x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，有$g(x)-f(\pi-x)=0$，即$g(x)=f(\pi-x)$. 综上所述，首先在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$内定义一个函数，使它等于$f(\pi-x)$，其次再按奇函数延拓到$(-\pi,\pi)$，设$f(x)$延拓到$(-\pi,\pi)$上的函数记为$\tilde{f}(x)$则

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x), & 0<x<\frac{\pi}{2},\\ f(\pi-x), & \frac{\pi}{2}<x<\pi,\\ -f(-x), & -\frac{\pi}{2}<x<0,\\ -f(\pi+x), & -\pi<x<-\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

【2977】 在区间$(0,\frac{\pi}{2})$把函数:

$$f(x)=x\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

(1) 按照角的奇倍数的余弦;(2) 按照角的奇倍数的正弦.展开,作出(1) 和(2) 情况的傅里叶级数的和的图形.

解 (1) 由 2975 题结论,延拓函数,使

$$f(-x)=f(x),f(\pi-x)=-f(x),$$

于是有
$$a_{2k+1}=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos(2k+1)x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[-f(\pi-x)]\cos(2k+1)x\mathrm{d}x\right\}.$$

在上式右端第二个积分中令$\pi-x=y$,则有与第一个积分同样的结果,于是

$$\begin{aligned}a_{2k+1}&=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos(2k+1)x\mathrm{d}x\\&=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\frac{\pi}{2}-x)\cos(2k+1)x\mathrm{d}x\\&=\frac{4}{(2k+1)\pi}x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin(2k+1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\&\quad-\frac{4}{(2k+1)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\sin(2k+1)x\mathrm{d}x\\&=\frac{4}{(2k+1)^2\pi}\left[\frac{\pi}{2}\cos(2k+1)x-2x\cos(2k+1)x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

$$+\frac{8}{(2k+1)^2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2k+1)x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{(2k+1)^2}+\frac{8}{(2k+1)^3\pi}\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$=-\frac{2}{(2k+1)^2}+\frac{8\cdot(-1)^k}{(2k+1)^3\pi},k=1,2\cdots,$$

从而，$f(x)$ 的展开式为

$$-2\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{(2k+1)^2}-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\right]\cdot\cos(2k+1)x\right\}$$

$$=x(\frac{\pi}{2}-x),x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

其和的图形如 2977 题图.

(2) 由 2976 题的结论，延拓函数，使 $f(-x)=-f(x)$，$f(\pi-x)=f(x)$，于是有

$$b_{2k+1}=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin(2k+1)x\mathrm{d}x\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(\pi-x)\sin(2k+1)x\mathrm{d}x\right],$$

现在上式右端第二个积分中令 $\pi-x=y$，则有与第一个积分同样的结论，于是

$$b_{2k+1}=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin(2k+1)x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin(2k+1)x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{4}{(2k+1)\pi}x(\frac{\pi}{2}-x)\cos(2k+1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$+\frac{4}{(2k+1)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\cos(2k+1)x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{(2k+1)^2\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\sin(2k+1)x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$+\frac{8}{(2k+1)^2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2k+1)x\mathrm{d}x$$

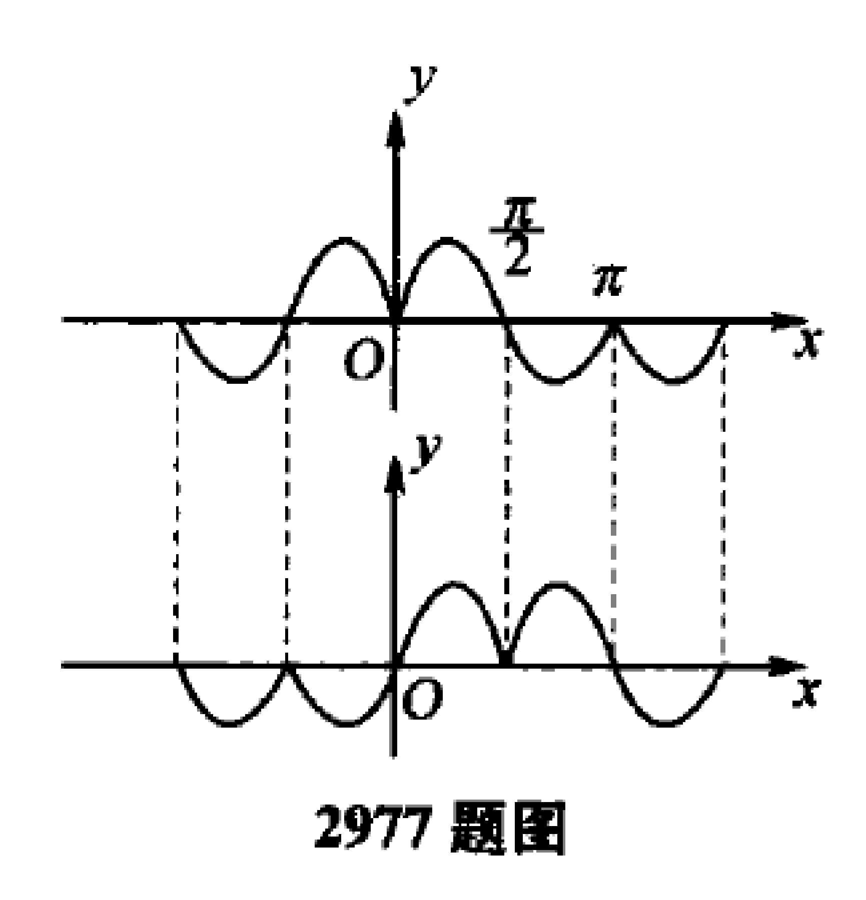
$$=\frac{2(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}+\frac{8}{(2k+1)^3\pi},k=0,1,2\cdots,$$

从而 $f(x)$ 的展式为

$$2\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}+\frac{4}{(2k+1)^3\pi}\right]\sin(2k+1)x\right\}$$

$$=x(\frac{\pi}{2}-x),x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

其和的图形如 2977 题图所示.



2977 题图

【2978】 函数 $f(x)$ 是以 π 为周期的反周期函数,亦即:

$$f(x+\pi)=-f(x),$$

这个函数在区间$(-\pi,\pi)$ 的傅里叶级数具有什么特征?

解 由

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0}f(\pi+x)\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\right],$$

$$n=0,1,2\cdots.$$

在上式右端第一个积分中令 $x+\pi=y$,则有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[(-1)^{n+1}+1]f(x)\cos nx\,dx,$$

从而有 $a_{2n}=0,n=0,1,2\cdots$ 同理,有 $b_{2n}=0,n=1,2\cdots$,因此,函数 $f(x)$ 在$(-\pi,\pi)$ 内的傅里叶级数的特性为

$$a_{2n}=0,n=0,1,2\cdots,b_{2n}=0,n=1,2\cdots.$$

【2979】 若 $f(x+\pi)=f(x)$，该函数在区间 $(-\pi,\pi)$ 的傅里叶级数具有什么特征？

解 和 2978 题类似，我们有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[(-1)^n+1]f(x)\cos nx\,dx, n=0,1,2\cdots.$$

于是有 $a_{2n+1}=0,\quad (n=0,1,2,3\cdots)$，

同理有 $b_{2n+1}=0,\quad (n=0,1,2,3\cdots)$.

从而 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内的傅里叶级数的特性为

$$a_{2n-1}=b_{2n-1}=0, n=1,2,3\cdots.$$

【2980】 一个具有周期为 2π 的函数 $y=f(x)$，若函数的图形：(1) 以 $(0,0)$，$(\pm\frac{\pi}{2},0)$ 点为对称中心；(2) 以坐标原点为对称中心及以 $x=\pm\frac{\pi}{2}$ 为对称轴，则其傅里叶系数 a_n，$b_n(n=1,2,\cdots)$ 具有什么特征？

解 (1) 设 $f(x)$ 满足

$$f(-x)=-f(x), f(\pi-x)=-f(x),$$

从而 $a_n=0, n=0,1,2\cdots$，

又
$$b_n=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin nx\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[-f(\pi-x)]\sin nx\,dx\right\}$$
$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin nx\,dx+(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(y)\sin ny\,dy\right]$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1+(-1)^n]f(x)\sin nx\,dx,$$

于是 $b_{2n-1}=0, n=1,2,3\cdots$，

从而 $f(x)$ 的傅里叶级数的特性为

$$a_n=0, n=0,1,2\cdots,$$
$$b_{2n-1}=0, n=1,2,3\cdots.$$

(2) 设 $f(x)$ 满足

$$f(-x)=-f(x), f(\pi-x)=f(x),$$

和(1)相同,

$$a_n = 0, n = 0,1,2\cdots,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1+(-1)^{n+1}] f(x)\sin x\,dx,$$

于是 $\quad b_{2n} = 0, n = 1,2,3\cdots,$

从而,$f(x)$ 的傅里叶系数的特性为

$$a_n = 0, n = 0,1,2\cdots,$$

$$b_n = 0, n = 1,2,3\cdots.$$

【2981】 若 $\varphi(-x) = \psi(x)$,函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的傅里叶系数 a_n, b_n 与 $\alpha_n, \beta_n (n = 0,1,2,\cdots)$ 之间是什么关系?

解 函数 $\varphi(x)$ 的傅里叶系数为

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\cos nx\,dx, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\sin nx\,dx.$$

函数 $\psi(x)$ 的傅里叶系数为

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\cos nx\,dx,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\sin nx\,dx.$$

因为

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \varphi(x)\cos nx\,dx + \int_0^{\pi} \varphi(x)\cos nx\,dx\right],$$

现在上式右端两个积分中作变换 $-x = y$,将 $\varphi(-x) = \psi(x)$ 代入上式有

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} \psi(x)\cos nx\,dx + \int_{-\pi}^{0} \psi(x)\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\cos nx\,dx = \alpha_n,$$

同理 $\quad b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \varphi(x)\sin nx\,dx + \int_0^{\pi} \varphi(x)\sin nx\,dx\right]$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\int_0^{\pi} \psi(x)\sin nx\,dx - \int_{-\pi}^{0} \psi(x)\sin nx\,dx\right]$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\sin nx\,dx = -\beta_n,$$

从而 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 的傅里叶系数 a_n，b_n 与 α_n，β_n 的关系为

$$a_n = \alpha_n, n = 0,1,2\cdots,$$

$$b_n = -\beta_n, n = 1,2,3\cdots.$$

【2982】 若 $\varphi(-x) = -\psi(x)$，函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的傅里叶系数 a_n，b_n 与 α_n，β_n（$a = 0,1,2,\cdots$）彼此之间是什么关系？

解 设函数 $\varphi(x)$ 的傅里叶系数为

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx.$$

函数 $\psi(x)$ 的傅里叶系数为

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx\,dx,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin nx\,dx.$$

因为 $a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\varphi(x)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx\right]$，

现在上式右端两个积分中作变换 $-x = y$，且将 $\varphi(-x) = -\psi(x)$ 代入上式有

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[-\int_{0}^{\pi}\psi(x)\cos nx\,dx - \int_{-\pi}^{0}\psi(x)\cos nx\,dx\right]$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx\,dx = -\alpha_n,$$

同理有 $b_n = \beta_n$，于是，$\varphi(x)$，$\psi(x)$ 的傅里叶系数 a_n，b_n 与 α_n，β_n 的关系为 $a_n = -\alpha_n, n = 0,1,2\cdots,$

$$b_n = \beta_n, n = 1,2,3\cdots.$$

【2983】 已知具有周期 2π 的可积函数 $f(x)$ 的傅里叶系数为 a_n，b_n（$n = 0,1,2,\cdots$），计算有"平移"的函数 $f(x+h)$（h 为常数）的傅里叶系数 $\bar{a}_n$，$\bar{b}_n$（$n = 0,1,2,\cdots$）.

解 由题意

$$\bar{a}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+h)\cos nx\,dx,$$

在上式中令 $y=x+h$ 和 $f(x)$ 的周期性有

$$\bar{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h}f(y)[\cos nh\cos ny+\sin nh\sin ny]\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\cos nh\,\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\sin nh\,\mathrm{d}x\right]$$
$$=a_n\cos nh+b_n\sin nh.$$

同理,有 $\bar{b}_n=b_n\cos nh-a_n\sin nh$.

【2984】 已知周期为 2π 的可积函数 $f(x)$ 的傅里叶系数 a_n, $b_n(n=0,1,2,\cdots)$,计算斯捷克洛夫函数

$$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

的傅里叶系数 $A_n,B_n(n=0,1,2,\cdots)$.

解 由

$$f_h(x+2\pi)=\frac{1}{2h}\int_{x+2\pi-h}^{x+2\pi+h}f(\xi)\mathrm{d}\xi$$
$$=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(\xi)\mathrm{d}\xi=f_h(x).$$

知 $f_h(x)$ 仍以 2π 为周期,从而有

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_h(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2\pi h}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\int_{x-h}^{x+h}f(\xi)\mathrm{d}\xi$$
$$=\frac{1}{2\pi h}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\int_{-h}^{h}f(x+y)\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2\pi h}\int_{-h}^{h}\mathrm{d}y\int_{-\pi}^{\pi}f(x+y)\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

由 2983 题的结论有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+y)\cos nx\,\mathrm{d}x=a_n\cos ny+b_n\sin ny,$$

于是 $$A_n=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}(a_n\cos ny+b_n\sin ny)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{a_n}{h}\int_0^h\cos ny\,\mathrm{d}y=\begin{cases}a_n, & n=0,\\ \dfrac{a_n\sin nh}{nh}, & n=1,2\cdots.\end{cases}$$

即 $$A_0=a_0,A_n=\frac{a_n\sin nh}{nh},(n=1,2\cdots).$$

同理 $$B_n=\frac{b_n\sin nh}{nh},n=1,2\cdots.$$

【2985】 令 $f(x)$ 为带有周期为 2π 的连续函数，而 $a_n,b_n(n=0,1,2,\cdots)$ 为它的傅里叶系数.求解卷积函数：

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t,$$

的傅里叶系数 $A_n,B_n(n=0,1,2,\cdots)$.

利用所得的结果，推导李雅普洛夫等式.

解 因卷积函数

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)(x+t)\mathrm{d}t,$$

于是 $$F(x+2\pi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+2\pi+t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t=F(x),$$

从而 $F(x)$ 是以 2π 为周期的函数，设 A_n,B_n 为 $F(x)$ 的傅里叶系数，故有

$$\begin{aligned}A_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(\xi)\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{\pi^2}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t\right]^2=a_0^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos nx\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(\xi)(\cos n\xi\cos nt + \sin n\xi\sin nt)\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [a_n f(t)\cos nt + b_n f(t)\sin nt]\mathrm{d}t$$

$$= a_n^2 + b_n^2,$$

这里 a_n, b_n 为 $f(x)$ 的傅里叶系数.

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin n\,x\,\mathrm{d}x\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(\xi)(\sin n\xi\cos nt - \cos n\xi\sin nt)\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [b_n f(t)\cos nt - a_n f(t)\sin nt]\mathrm{d}t$$

$$= b_n a_n - a_n b_n = 0.$$

由 $f(x)$ 的连续性知,$F(x)$ 也是连续函数,且 $B_n = 0$,从而由展开定理有

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos nx,$$

于是有 $F(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$

又 $A_0 = a_0{}^2, A_n = a_n^2 + b_n^2,$

$$F(0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(0+t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\mathrm{d}t,$$

故有 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n{}^2 + b_n{}^2),$

也就是李雅普诺夫等式成立.

§7. 级数的求和法

1. **直接求和法** 若

$$u_n = v_{n+1} - v_n \qquad (n = 1,2,\cdots).$$

与 $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v_\infty$,

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = v_\infty - v_1$,

特别是若 $u_n = \dfrac{1}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m}}$.

其中数 $a_i (i = 1,2,\cdots)$ 形成公差为 d 的算术级数. 则

$$v_n = -\frac{1}{md} \cdot \frac{1}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m-1}}.$$

在某些情况下,未知级数能表为下列已知级数的线性组合:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ 等等.}$$

2. **阿贝尔方法** 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛,则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

在最简单的例子中幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和可用逐项微分或积分法求得.

3. **三角级数的求和法** 为了求级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \qquad \text{及} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

的和,常常把它们看作是复数域内幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$(其中 $z = e^{ix}$)的和的实数部分及相应的虚数部分的系数.

在许多情况下级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\ln\frac{1}{1-z}\qquad(|z|<1),$$

是有用的.

求下列级数的和(2986 ~ 3000).

【2986】 $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots.$

解 $1\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$

$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2m+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

【2987】 $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots.$

解 因为

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right],$$

且由 2549 知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1,$$

有 $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}+\cdots$

$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{2}\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

【2988】 $\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$.

解 $\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right)\right.$$

$$\left.+(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1}-1\right\}$$

$$=2\ln 2-1.$$

【2989】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

解 因为

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{2}{n+3}=\frac{3n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

及 2987 的结论，于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{2}{n+3}\right)$$

$$-\frac{5}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)-\frac{5}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\right)$$

$$=\frac{1}{4}.$$

【2990】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}$（$m$ 为自然数）.

解 因为

$$\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m+n}\right),$$

于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}=\lim_{l\to\infty}\sum_{n=1}^{l}\frac{1}{n(n+m)}$$

$$=\frac{1}{m}\lim_{l\to\infty}\sum_{n=1}^{l}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m+n}\right)$$

$$=\frac{1}{m}\lim_{l\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\frac{1}{l+1}-\frac{1}{l+2}-\cdots-\frac{1}{l+m}\right)$$

$$=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right).$$

【2991】 $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7}+\cdots.$

解 由

$$\frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2n-1)2n}-\frac{1}{2n(2+1)}\right],$$

有

$$原级数=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)2n}-\frac{1}{2n(2n+1)}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{2}(2\ln 2-1)\qquad(2988\text{ 题结论})$$

$$=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

【2992】 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}.$

解

$$原级数=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=2}^{m}\frac{1}{n^2-1}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=2}^{m}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{m+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}.$$

【2993】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2(n+1)^2}$.

解 由

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2},$$

有

$$原级数=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$=\frac{\pi^2}{6}-\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)=1.$$

【2994】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$.

解 由

$$\frac{1}{n(2n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{2}{2n+1},$$

有

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(2n+1)}$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}-2\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}-2\left(\sum_{k=1}^{2m+1}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}-1\right)$$

$$=c+\ln m+\varepsilon_1-2\Big[(c+\ln(2m+1)+\varepsilon_2)-\frac{1}{2}(c+\ln m+\varepsilon_3)-1\Big]$$

$$=2\ln\frac{m}{2m+1}+\alpha+2,$$

其中 $\varepsilon_1\to0,\varepsilon_2\to0,\varepsilon_3\to0,\alpha=\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_3\to0,(m\to\infty)$. 故

$$原级数=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(2n+1)}$$

$$=2\ln\frac{1}{2}+2=2(1-\ln2).$$

【2995】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$.

解 原级数$=\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{n^2}{n!}$

$$=\lim_{m\to\infty}\left\{1+2+\sum_{n=3}^{m}\frac{n^2}{n!}\right\}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left\{3+\sum_{n=3}^{m}\left[\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}\right]\right\}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left\{3+\sum_{k=2}^{m-1}\frac{1}{k!}+\sum_{l=1}^{m-1}\frac{1}{l!}\right\}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left\{2\left(1+\sum_{s=1}^{m}\frac{1}{s!}\right)+O\left(\frac{1}{m}\right)\right\}=2e.$$

【2996】 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}$.

解 原级数$=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n-1)!}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$

$$=2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m}{m!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!},$$

又设 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\sum\limits_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}d_n,$

则 $d_n=\sum\limits_{k+l=n}\frac{1}{k!l!}=\frac{1}{n!}\sum\limits_{k+l=n}\frac{n!}{k!l!}=\frac{1}{n!}\sum\limits_{s=0}^{n}C_n^s=\frac{2^n}{n!}.$

于是 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\right)^2=e^2.$

故原级数 $=3e^2$.

【2997】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}$.

解 由

$$\frac{1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{2}{n(n+1)},$$

有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\frac{\pi^2}{6}+\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)-2=\frac{\pi^2}{3}-3.$$

【2998】 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}$.

解　因为

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{2}{n^2}+\frac{6}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=-\frac{3}{(n+1)^2(n+2)^2}-\frac{12n+8}{n^2(n+1)^2(n+2)^2},\qquad ①$$

$$2\left[\frac{1}{n^2(n+1)^2}+\frac{1}{n^2(n+2)^2}-\frac{2}{(n+1)^2(n+2)^2}\right]$$

$$=\frac{12n+10}{n^2(n+1)^2(n+2)^2},\qquad ②$$

$$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{2}{n(n+2)}=\frac{4}{n^2(n+2)^2},\qquad ③$$

现把①+②+③有

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n(n+2)}$$

$$+\frac{6}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}+\frac{2}{n^2(n+1)^2}$$

$$=\frac{2}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}.$$

又由2961题,2990题,2987题,2997题的结论知

$$原级数=\frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2}\right.$$

$$-\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$$

$$+6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}-1-\frac{1}{4}\right)\right.$$

$$-\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+6\cdot\frac{1}{4}$$

$$-\left(\frac{\pi^2}{3}-3-\frac{1}{4}\right)+2\left(\frac{\pi^2}{3}-3\right)\Big\}$$

$$=\frac{\pi^2}{4}-\frac{39}{16}.$$

【2999】 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$.

解 由

$$\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}=\frac{(-1)^n}{2}\left[\frac{1}{(2n)!}-\frac{1}{(2n+1)!}\right].$$

有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right.$$

$$\left.-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}-\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 1-\sin 1).$$

【3000】 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$.

解 原级数 $=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=2}^{m}\frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$

$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=2}^{m}\frac{(-1)^n}{3}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\frac{1}{3}\sum_{l=4}^{m+2}\frac{(-1)^{l+1}}{l}\right]$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left[\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{k}+\frac{1}{3}\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+O\left(\frac{1}{m}\right)\right]$$

$$=\frac{2}{3}\ln 2-\frac{5}{18}.$$

【3001】 令 $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$，求级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(n)}{n!}x^n$ 的和.

解 令

$$P(n)=a_0+a_1n+\cdots+a_mn^m$$
$$=\alpha_0+\alpha_1n+\cdots+\alpha_nn(n-1)\cdots(n-m+1),$$

其中 $\alpha_i(i=0,1,\cdots,m)$ 由上式求出，于是

原级数

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_0+\alpha_1n+\cdots+\alpha_mn(n-1)\cdots(n-m+1)}{n!}x^n$$
$$=\alpha_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\alpha_1x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots$$
$$+\alpha_mx^m\sum_{n=m}^{\infty}\frac{x^{n-m}}{(n-m)!}$$
$$=\alpha_0\mathrm{e}^x+\alpha_1x\mathrm{e}^x+\cdots+\alpha_mx^m\mathrm{e}^x$$
$$=\mathrm{e}^x(\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_mx^m).$$

求出下列级数的和(3002 ～ 3005).

【3002】 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^nn!}x^n$.

解 由部分和

$$S_N=\sum_{n=0}^{N}\frac{n^2+1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$
$$=1+2\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{5}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2$$
$$+\sum_{n=3}^{N}\left[\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^n$$
$$=\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k\right]$$
$$+\left[\left(\frac{x}{2}\right)+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{l=2}^{N}\frac{1}{l!}\left(\frac{x}{2}\right)^l\right]$$
$$+\left[1+\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]+O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^2\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k+\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{l=0}^{N}\frac{1}{l!}\left(\frac{x}{2}\right)^l$$

$$+\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

$$=\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)+1\right]\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n+O\left(\frac{1}{N^2}\right),$$

知 $$\text{原级数}=\lim_{N\to\infty}S_N=\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$=\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}\right)e^{\frac{x}{2}}.$$

【3003】 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}x^n$.

解 由$\frac{n^3}{(n+1)!}=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$,

有 $$\text{原级数}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}(-x)^n$$

$$=\frac{1}{2}(-x)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{(n-2)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}$$

$$-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{(n+1)!}$$

$$=-\frac{x}{2}+x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^{n-2}}{(n-2)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}$$

$$-\frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$=-\frac{x}{2}+x^2e^{-x}+(e^{-x}-1+x)$$

$$+\frac{1}{x}\left(e^{-x}-1+x-\frac{x^2}{2!}\right)$$

$$=e^{-x}\left(x^2+1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}.$$

【3004】 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n^2+1)}{(2n)!}x^{2n}$.

解　因为

$$\frac{2n^2+1}{(2n)!}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2n-2)!}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2n-1)!}+\frac{1}{(2n)!},$$

于是

$$\begin{aligned}\text{原级数}&=1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-2)!}x^{2n}\\&\quad+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\\&=1-\frac{x^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}x^{2n-2}-\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}\\&\quad+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}-1\\&=\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\cos x-\frac{x}{2}\sin x.\end{aligned}$$

【3005】　$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{(2n+1)!}$.

解　若 $x=0$ 时，级数的和为零，设 $x>0$，S_N 为级数的部分和，令 $v=\sqrt{x}$，于是有

$$\begin{aligned}S_N&=\sum_{n=0}^{N}\frac{n^2v^{2n}}{(2n+1)!}\\&=\frac{1}{4v}\sum_{n=0}^{N}\frac{(2n)^2-1}{(2n+1)!}v^{2n+1}+\frac{1}{4v}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v^{2n+1}}{(2n+1)!}\\&=\frac{1}{4v}\sum_{n=0}^{N}\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n+1)!}v^{2n+1}+\frac{1}{4v}\operatorname{sh}v+o(1)\\&=\frac{1}{4v}\left[v^2\sum_{n=1}^{N}\frac{v^{2n-1}}{(2n-1)!}-v\sum_{n=0}^{N}\frac{v^{2n}}{(2n)!}\right]+\frac{1}{4v}\operatorname{sh}v+o(1)\\&=\frac{1}{4v}[v^2\operatorname{sh}v-v\operatorname{sh}v+o(1)]+\frac{1}{4v}\operatorname{sh}v+o(1)\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{v^2+1}{v}\operatorname{sh}v-\operatorname{ch}v\right)+o(1)\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\operatorname{sh}\sqrt{x}-\operatorname{ch}\sqrt{x}\right)+o(1),\end{aligned}$$

因而当 $x>0$ 时,原级数 $=\lim\limits_{N\to\infty}S_N=\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\operatorname{sh}\sqrt{x}-\operatorname{ch}\sqrt{x}\right)$.

若 $x<0$,令 $y=\sqrt{|x|}$,则 $x=-y^2$,于是有

$$\begin{aligned}S_N&=\sum_{n=0}^{N}\frac{n^2(-1)^n y^{2n}}{(2n+1)!}\\&=\frac{1}{4y}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n[(2n)^2-1]}{(2n+1)!}y^{2n+1}+\frac{1}{4y}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}\\&=\frac{1}{4y}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n(2n-1)(2n+1)}{(2n+1)!}y^{2n+1}+\frac{1}{4y}\sin y+o(1)\\&=\frac{1}{4y}\left[y^2\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n y^{2n-1}}{(2n-1)!}-y\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!}\right]\\&\quad+\frac{1}{4y}\sin y+o(1)\\&=\frac{1}{4y}[-y^2\sin y-y\cos y+o(1)]+\frac{1}{4y}\sin y+o(1)\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{-y^2+1}{y}\sin y-\cos y\right)+o(1)\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{|x|}}\sin\sqrt{|x|}-\cos\sqrt{|x|}\right)+o(1),\end{aligned}$$

因而,当 $x<0$ 时

$$\begin{aligned}\text{原级数}&=\lim_{N\to\infty}S_N\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{|x|}}\sin\sqrt{|x|}-\cos\sqrt{|x|}\right).\end{aligned}$$

用逐项微分法求出级数的和(3006 ~ 3010)

【3006】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

解 令 $a_n=\frac{1}{n}$,有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

从而收敛半径为 1,当 $x=1$ 时,级数发散,当 $x=-1$ 时,级数收敛,故级数的收敛域为$[-1,1)$.

当 $x\in[-1,1)$ 时,令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},$$

当 $|x|<1$ 时,逐项求导有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},$$

又 $f(0)=0$,因此

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t$$

$$=\ln\frac{1}{1-x},\ |x|<1, \qquad ①$$

由阿贝尔定理知 ① 式当 $x\in[-1,1)$ 时成立.

【3007】 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$.

解　令 $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$,

有
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{n(2n-1)}=1,$$

于是收敛半径为 1.

当 $|x|=1$ 时,级数绝对收敛,于是级数的收敛域为$[-1,1]$.

当 $x\in[-1,1]$ 时,令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)},$$

当 $|x|<1$ 时,逐项求导有

$$f'(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}=2\arctan x,\text{(2907 题结论)}.$$

又 $f(0)=0$,从而

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=2\int_0^x\arctan t\mathrm{d}t$$

$$=2x\arctan x-2\int_0^x\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=2x\arctan x-\ln(1+x^2). \qquad ①$$

当 $|x|=1$ 时,级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\ln 2,\text{(2938 题的结论)}.$$

由阿贝尔定理知,上述结果 ① 包括端点在内也成立,即 $x\in[-1,1]$ 时,① 式成立.

【3008】 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}+1}{4n+1}$.

解 令 $a_n=\frac{1}{4n+1}$,

有 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+5}{4n+1}=1.$$

于是收敛半径为 1,当 $|x|=1$ 时,级数发散,因而级数的收敛域为$(-1,1)$.

当 $x\in(-1,1)$ 时,令

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1},$$

逐项求导有

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}=\frac{1}{1-x^4}.$$

又 $f(0)=0$,于是

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^4}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x,\ |x|<1.$$

【3009】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d\cdot 2d\cdots nd}x^n,(d>0)$.

提示:级数的导数乘以 $1-x$.

解 设 $a\neq -md,m=0,1,2,\cdots$ 这是因为若 $a=-md$,则原

级数从 $m+1$ 项开始恒为零，故此时原级为一多项式

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d\cdot 2d\cdots nd}x^n,$$

它对任何 x 皆收敛.

令 $a_n=\dfrac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d\cdot 2d\cdots nd},n=1,2,3,\cdots,$

有 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)d}{a+nd}=1,$$

于是收敛半径为 1.

1° $x\in(-1,1)$ 时，令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d\cdot 2d\cdots nd}x^n,$$

逐项求导有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d\cdot d\cdot 2d\cdots(n-1)d}x^{n-1},$$

以 $(1-x)$ 乘上式两端，有

$$\begin{aligned}&(1-x)f'(x)\\&=\frac{a}{d}+\frac{a}{d}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d\cdot 2d\cdots nd}x^n\\&=\frac{a}{d}+\frac{a}{d}f(x).\end{aligned}$$

从而 $$f'(x)-\frac{a}{d}\cdot\frac{1}{1-x}f(x)=\frac{a}{d}\cdot\frac{1}{1-x}.$$

解方程有

$$f(x)=c(1-x)^{-\frac{a}{d}}-1,x\in(-1,1),c\text{ 为常数}.$$

又 $f(0)=0$，有 $0=c-1$，即 $c=1$，于是，当 $|x|<1$ 时

$$f(x)=(1-x)^{-\frac{a}{d}}-1. \qquad ①$$

2° $x=\pm1$ 时，当 $x=1$，则原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，易知存在 $n_0>0$，当 $n>n_0$ 时有 $a+nd>0$，又

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(d-a)n}{a+nd}=\frac{d-a}{d},$$

由拉阿贝判别法知，当 $a<0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，当 $a>0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，又 $a>0$ 时，$a_n>0$，于是 $a>0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$a<0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

当 $x=-1$ 时，此时级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$，当 $a<0$ 时，因为 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛，现考虑 $a>0$ 时情形，若 $a\geqslant d$，则有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(n+1)d}{a+nd}\leqslant 1,$$

于是 $$a_{n+1}\geqslant a_n>0, n=1,2,\cdots.$$

因而 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 的通项不趋于零，故该级数发散.

若 $0<a<d$ 时，有

$$\ln a_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left[\frac{a+(k-1)d}{kd}\right]=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{d-a}{kd}\right), \quad ②$$

因为 $0<a<d$，有

$$\ln\left(1-\frac{d-a}{kd}\right)<0, k=1,2,3,\cdots,$$

而 $$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{d-a}{kd}\right)}{-\frac{d-a}{kd}}=1,$$

又 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ 发散，从而 $\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{d-a}{kd}\right)$ 发散，于是

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{d-a}{kd}\right)=-\infty,$$

从而由 ② 知

$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n=-\infty.$$

于是 $$\lim_{n\to\infty}a_n=0. \quad ③$$

又　　$0 < a < d$,

有　　$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)d}{a+nd} > 1,$$

于是　　$a_n > a_{n+1} > 0, n = 1,2,3,4,\cdots.$　　④

从而，由 ③ 和 ④ 及莱布尼兹判别法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

综上所述，当$a<0$时，原幂级数的收敛域为$x \in [-1,1]$，且公式①成立，当$0<a<d$时，原幂级数的收敛域为$x \in [-1,1)$，且在其上，公式 ① 成立，当 $a \geqslant d$ 时，原幂级数的收敛域为 $x \in (-1,1)$，且在其上，公式 ① 成立.

【3010】 $\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{2}+\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\cdots.$

解　令

$$a_n = \frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdots 3n}\cdot\frac{1}{2^n},$$

有　　$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2(3n+3)}{3n+1} = 2.$$

从而收敛半径为 2.

1° 当 $x \in (-2,2)$ 时，令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdots 3n}\left(\frac{x}{2}\right)^n,$$

逐项求导有

$$f'(x) = \frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdots(3n-3)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1},$$

以$\left(1-\frac{x}{2}\right)$乘上式两端有

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)f'(x) = \frac{1}{6}f(x)+\frac{1}{6},$$

即　　$$f'(x)-\frac{1}{6\left(1-\frac{x}{2}\right)}f(x) = \frac{1}{6\left(1-\frac{x}{2}\right)}.$$

解方程有 $f(x) = c\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}-1, x \in (-2,2).$

又 $f(0)=0$，于是 $c=1$，从而当 $x\in(-2,2)$ 时，有

$$f(x)=\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}-1. \quad ①$$

2° $x=2$ 时，此时原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdots 3n}$，

令 $b_n=\frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdots 3n}, n=1,2,\cdots.$

而 $$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+1}=\frac{2}{3}<1,$$

故由拉阿贝判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

3° 当 $x=-2$ 时，此时级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b^n$，

又 $$\frac{b_n}{b_{n+1}}=\frac{3n+3}{3n+1}>1,$$

于是 $$b_n>b_{n+1}>0, n=1,2,3,\cdots. \quad ②$$

而 $$\ln b_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{3k-2}{3k}=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{2}{3k}\right),$$

由 $\ln\left(1-\frac{2}{3k}\right)<0, k=1,2,3,\cdots,$

且 $$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{2}{3k}\right)}{-\frac{2}{3k}}=1,$$

知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{2}{3k}\right)$ 发散，于是

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{2}{3k}\right)=-\infty,$$

从而 $$\lim_{n\to\infty}\ln b_n=-\infty,$$

即 $$\lim_{n\to\infty}b_n=0. \quad ③$$

由 ② 及 ③ 式，据莱布尼兹判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ 收敛.

综上所述，原级数的收敛域为 $x\in[-2,2)$，且在 $[-2,2)$ 上，

公式 ① 成立.

用逐项积分法求出级数的和(3011 ～ 3013).

【3011】 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$.

解 令 $a_n = n^2$,

有 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = 1,$$

于是收敛半径为 1.

当 $|x| = 1$ 时,由 $n^2 \to +\infty(n\to\infty)$ 知,级数发散,从而级数的收敛域为$(-1,1)$,令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1},$$

逐项积分有

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n^2 t^{n-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

因此,当 $x \in (-1,1)$ 时

$$f(x) = \left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]' = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

【3012】 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n$.

解 令 $a_n = n(n+2)$,

有 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)} = 1,$$

于是收敛半径为 1. 当 $|x| = 1$ 时,又由 $n(n+2) \to \infty$ 知,级数发散,从而级数的收敛域为$(-1,1)$. 现令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^{n-1}$$
$$= xg(x), x \in (-1,1),$$

其中 $$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^{n-1}.$$

由 2911 题结论有

$$G(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)\int_0^x t^{n-1}\mathrm{d}t$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n+2\sum_{n=1}^{\infty}x^n$$
$$=\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{2x}{1-x}=\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2},$$

于是 $$g(x)=[G(x)]'=\left[\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2}\right]'=\frac{3-x}{(1-x)^3}.$$

因此 $$f(x)=xg(x)=\frac{x(3-x)}{(1-x)^3},x\in(-1,1).$$

【3013】 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}.$

解 令 $a_n=\dfrac{2n+1}{n!}$,

有 $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{2n+3}=+\infty,$$

于是级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$. 令

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!},x\in(-\infty,+\infty),$$

逐项积分有

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(2n+1)t^{2n}}{n!}\mathrm{d}t$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=xe^{x^2},$$

从而 $$f(x)=(xe^{x^2})'=e^{x^2}(1+2x^2),x\in(-\infty,+\infty).$$

利用阿贝尔方法求出下列级数的和(3014 ~ 3017).

【3014】 $1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}+\cdots.$

解 考察级数 $x-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^7}{7}-\dfrac{x^{10}}{10}+\cdots,$ ①

易知级数(1) 的收敛域为$(-1,1]$,当 $x\in(-1,1)$ 时,令

$$f(x)=x-\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^{10}}{10}+\cdots,$$

逐项微分有

$$f'(x)=1-x^3+x^6-x^9+\cdots=\frac{1}{1+x^3},$$

又 $f(0)=0$,有

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}},$$

这里 $x\in(-1,1)$,于是由阿贝尔定理有

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots$$

$$=\lim_{x\to1^-}f(x)=f(1)=\frac{1}{3}\ln2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

【3015】 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$

解　考察级数

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots,\qquad①$$

易知级数(1)的收敛域为$[-1,1]$,由 2907 题的结论知,当 $x\in(-1,1)$ 时,有

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots.$$

由阿贝尔定理有

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\lim_{x\to1^-}\arctan x$$

$$=\arctan1=\frac{\pi}{4}.$$

【3016】 $1-\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\cdots.$

解　考察级数

$$1-\frac{x}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots,\qquad①$$

易知级数 ① 的收敛域为$(-1,1]$,由 2910 题的结论知,当 $x\in$

$(-1,1)$ 时,有

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots.$$

由阿贝尔定理有

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

【3017】 $1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}+\cdots.$

解 考察级数

$$x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{3}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots, \qquad ①$$

易知级数 ① 的收敛域为$[-1,1]$,由 2870 题结论知,当 $x\in(-1,1)$ 时,有

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots.$$

由阿贝尔定理有

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}+\cdots=\lim_{x\to 1^-}\arcsin x=\frac{\pi}{2},$$

求出下列三角级数的和(3018 ~ 3026).

【3018】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$

解 由 $\ln\frac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}, z=e^{ix}$,

及

$$\ln\frac{1}{1-z}=-\ln(1-\cos x-i\sin x)$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(2-2\cos x)+i\arctan\frac{\sin x}{1-\cos x}$$

(因为 $\ln z=\ln|z|e^{i\arg z})=\ln|z|+i\arg z$)

$$=-\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|+i\arctan\frac{\sin}{1-\cos x}, \qquad ①$$

又

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \qquad ②$$

知
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=-\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|,x\in(0,2\pi),\quad ③$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\arctan\frac{\sin x}{1-\cos}=\arctan\left(\cot\frac{x}{2}\right)$$
$$=\arctan\left(\tan\frac{\pi-x}{2}\right)=\frac{\pi-x}{2},$$
$$x\in(0,2\pi).$$

【3019】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$.

解 见题 3018.

【3020】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha\sin nx}{n}$.

解 由积化和差公式及 3019 题结论知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha\sin nx}{n}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(x-\alpha)}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(x+\alpha)}{n}$$
$$=-\frac{1}{2}\ln\left|2\sin\frac{x-\alpha}{2}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|2\sin\frac{x+\alpha}{2}\right|$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin\frac{x+\alpha}{2}}{\sin\frac{x-\alpha}{2}}\right|,$$

其中收敛域为$\{x\mid 0<x-\alpha<2\pi\}\cap\{x\mid 0<x+\alpha<2\pi\}$，故当$\alpha>0$时，$x\in(\alpha,2\pi-\alpha)$，当$\alpha<0$时，$x\in(-\alpha,2\pi+\alpha)$.

【3021】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha\sin nx}{n},\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

解 由半角公式、积化和差及 3018 题结论有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha\sin nx}{n}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\alpha\sin n\alpha}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x+2\alpha)}{n}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x-2\alpha)}{n},$$

下面分三种情形讨论此级数的和.

1° 当 $x\in(0,2\pi)$，$x\in(2\alpha,2\pi-2\alpha)$，此时，级数的和 S 为

$$S=\frac{\pi-x}{4}-\frac{\pi-(x+2\alpha)}{8}-\frac{\pi-(x-2\alpha)}{8}=0.$$

2° 当 $x\in(0,2\alpha)$ 时

$$S=\frac{\pi-x}{4}-\frac{\pi-(x+2\alpha)}{8}+\frac{\pi-(2\alpha-x)}{8}=\frac{\pi}{4}.$$

3° 当 $x\in(2\pi-2\alpha,2\pi)$ 时

$$S=\frac{\pi-x}{4}-\frac{\pi-(x+2\alpha-2\pi)}{8}-\frac{\pi-(x-2\alpha)}{8}$$

$$=-\frac{\pi}{4},$$

这里用了 3018 题的结论及由 $2\pi<x+2\alpha<3\pi$，可令

$$x+2\alpha=2\pi+\theta,\theta\in(0,\pi),$$

则有 $\qquad \sin n(x+2\alpha)=\sin n(2\pi+\theta)=\sin n\theta,$

并以 $\theta=x+2\alpha-2\pi$ 代替 3018 题中 x.

【3022】 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$.

解 令 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$,

由 3018 题的结论知

$$f(x)=(\operatorname{sgn}x)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n|x|}{n}$$

$$=\left(\operatorname{sgn}x\cdot\frac{\pi-|x|}{2}\right),x\in(-2\pi,2\pi).$$

令 $\qquad f_1(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1},$

$$f_2(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{2k},$$

有 $\qquad f_2(x)=(\operatorname{sgn}x)\cdot\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k(2|x|)}{k}$

$$=\frac{1}{2}(\mathrm{sgn}x)\cdot\frac{\pi-2|x|}{2},x\in(-\pi,\pi).$$

由　$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$,

当 $x\in(-\pi,\pi)$ 时,有

$$(\mathrm{sgn}x)\cdot\frac{\pi-|x|}{2}=f_1(x)+(\mathrm{sgn}nx)\cdot\frac{\pi-2|x|}{4},$$

于是　$$f_1(x)=(\mathrm{sgn}x)\left(\frac{\pi-|x|}{2}-\frac{\pi-2|x|}{4}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}x,x\in(-\pi,\pi).$$

【3023】　$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2-1}$.

解　由

$$\ln\frac{1}{1-z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n},$$

令　$z=-e^{ix}$,

有　$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}=-\frac{x}{2},x\in(-\pi,\pi),\qquad ①$$

和　$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n}=-\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right).\qquad ②$$

又　$$\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right),$$

有　$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2-1}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n+1}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\cos(m+1)x}{m}+\frac{1}{2}\sum_{m=3}^{\infty}(-1)^m\frac{\cos(m-1)x}{m}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m}[\cos(m-1)x-\cos(m+1)x]$$

$$-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\cos x}{2}\right)+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m}\sin mx\sin x$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\cos x}{2}\right)-\frac{x}{2}\sin x, x\in(-\pi,\pi).$$

【3024】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

解 令 $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$,

易知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛,因而 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,且 $F(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数,由此,我们只要求 $F(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的值,又

$$2\sin x\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)x=1-\cos 2nx,$$

于是当 $\tau\leqslant x\leqslant\pi-\tau$($\tau\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$是任意的)时,有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)x\right|\leqslant\frac{1}{\sin\tau},$$

从而,由狄里克雷判别法知级数 $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ 在 $[\tau,\pi-\tau]$ 上一致收敛. 因而由逐项求导有当 $x\in[\pi,\pi-\tau]$ 时,有

$$F'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=-\frac{\pi}{4},$$

(3022 题结论). ①

由 τ 的任意性知 ① 式在 $x\in(0,\pi)$ 时皆成立,故

$$F(x)=-\frac{\pi}{4}x+C, x\in(0,\pi), \quad ②$$

其中 C 是常数. 又 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且由 2961 题结论

$$F(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

在 ② 式中令 $x\to 0^+$,有 $C=\frac{\pi^2}{8}$,

从而　$F(x)=-\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi^2}{8}, x\in[0,\pi)$.

因此　$F(x)=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}|x|, x\in[-\pi,\pi]$.

【3025】　$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n(n+1)}$.

解　由 $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ 及 3023 题的 ①,② 式有

$$\begin{aligned}\text{原级数}&=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n+1}\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}-\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\sin(m-1)x}{m}\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}-\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\sin mx}{m}\cos x\\&\quad+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\cos mx}{m}\sin x\\&=-(1+\cos x)\left(-\frac{x}{2}\right)-\sin x\cdot\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\\&=\frac{x}{2}(1+\cos x)-\sin x\cdot\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right),\\&\qquad x\in(-\pi,\pi).\end{aligned}$$

【3026】　$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$.

解　因为

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},$$

令　$z=e^{ix}$,

有　$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!},$$

$$e^z=e^{\cos x+i\sin x}=e^{\cos x}[\cos(\sin x)+i\sin(\sin x)].$$

于是　$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}=e^{\cos x}\cos(\sin x), x\in(-\infty,+\infty).$$

【3027】 作出下列曲线的图形：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\cdot\sin ny}{n^2}=0.$$

解 令 $f(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx\cdot\sin ny}{n^2}$,

显然 $f(x,y)$ 对 x,y 分别以 2π 为周期的周期函数，于是我们仅需考虑如下定义域

$$R=\{(x,y)\mid 0\leqslant x<2\pi,0\leqslant y<2\pi\}.$$

设 $g(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nt}{n^2},t\in(-\infty,+\infty)$,

类似于 3024 题的办法，及 3022 题求解过程中的关系，有

$$g'(t)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n}=-(\operatorname{sgn}t)\frac{\pi-|t|}{2},0<|t|<2\pi,$$

又 $$g(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},$$

从而有 $$g(t)=g(0)+\int_0^t g'(t)\mathrm{d}t=g(0)-\frac{\pi}{2}|t|+\frac{1}{4}t^2.$$

由 $$\sin nx\cdot\sin ny=\frac{1}{2}[\cos n(x-y)-\cos n(x+y)],$$

有
$$\begin{aligned}f(x,y)&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(x-y)-\cos n(x+y)}{n^2}\\&=\frac{1}{2}[g(x-y)-g(x+y)]\\&=\frac{1}{2}\left\{\left[g(0)-\frac{\pi}{2}|x-y|+\frac{1}{4}(x-y)^2\right]\right.\\&\quad\left.-\left[g(0)-\frac{\pi}{2}|x+y|+\frac{1}{4}(x+y)^2\right]\right\}\\&=\frac{\pi}{4}(|x+y|-|x-y|)\\&\quad+\frac{1}{8}[(x-y)^2-(x+y)^2]\\&=\frac{\pi}{4}\cdot 2\min\{x,y\}+\frac{1}{8}(-4xy)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}[\pi-\max\{x,y\}]\cdot\min\{x,y\}.$$

若 $x\leqslant y$,则令 $f(x,y)=0,(x,y)\in R$,有 $x(\pi-y)=0$,即 $x=0$ 或 $y=\pi$.

若 $x\geqslant y$,则令 $f(x,y)=0,(x,y)\in R$,有 $y(\pi-x)=0$,即 $y=0$ 或 $x=\pi$.

因此,在 R 内,$x=0,x=\pi,y=0,y=\pi$ 各直线是 $f(x,y)=0$ 的图形.

又由 $f(x,y)$ 的表达式知,图形是按 x 和按 y 以 2π 为周期的周期函数,从而

$$x=l\pi,l=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

$$y=m\pi,m=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

诸直线皆为 $f(x,y)=0$ 的图形,且除此以外,皆有 $f(x,y)\neq0$,因此,$f(x,y)=0$ 的图形即为上述所指的两族直线,这是两族分别与坐标轴平行且相距为 π 的直线族,图形省略.

求出下列级数的和(3028 ~ 3033).

【3028】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n!)^2}{(2n+2)!}(2x)^{2n+2}}{\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2x^2}{(2n+2)(2n+1)}=x^2,$$

于是当 $|x|<1$ 时,幂级数收敛,当 $|x|>1$ 时,发散,当 $|x|=1$ 时原级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2 4^n}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n,$$

而 $$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n}=\frac{3}{2}>1(n\to\infty),$$

于是由拉阿贝判别法知,当 $|x|=1$ 时,原级数收敛,因此,该幂级数的收敛域为 $[-1,1]$,且在 $[-1,1]$ 上一致收敛,从而其和函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续,于是在 $(-1,1)$ 上逐项求导有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}4n(2x)^{2n-1},(-1<x<1),$$

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}8n(2n-1)(2x)^{2n-2},$$

$$(-1<x<1).$$

于是 $\quad -xf'(x)+(1-x^2)f''(x)$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}2n(2x)^{2n}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}\cdot 8n(2n-1)(2x)^{2n-2}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}2n(2n-1)(2x)^{2n}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}4n^2(2x)^{2n}+4$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}8n(2n-1)(2x)^{2n-2}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}4n^2(2x)^{2n}+4$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+2)!}8(n+1)(2n+1)(2x)^{2n}$$

$$=4,(-1<x<1).$$

于是 $$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f'(x)+\sqrt{1-x^2}f''(x)=\frac{4}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$x\in(-1,1).$$

两边积分有

$$\sqrt{1-x^2}f'(x)=4\arcsin x+C,x\in(-1,1).$$

由 $f(0)=0$,有 $C=0$,从而

$$f'(x)=\frac{4\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},x\in(-1,1).$$

对上式两边积分有

$$f(x)=2(\arcsin x)^2+C_1,x\in(-1,1).$$

又由 $f(0)=0$，有 $C_1=0$，于是我们有

$$f(x)=2(\arcsin x)^2, x\in(-1,1). \quad ①$$

又上式两端都是$[-1,1]$上的连续函数，于当 $x=\pm 1$ 时，① 式也成立，由此，我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}=2(\arcsin x)^2, x\in[-1,1].$$

【3029】 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{1}{4},$$

于是级数的收敛半径为 4，即当 $|x|<4$ 时，级数收敛，$|x|>4$ 时，级数发散，当 $|x|=4$ 时，此级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(\pm 4)^n$. ①

令 $a_n=\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$,

有 $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{2n+2}{2n+1}>1.$$

从而 $|a_{n+1}>|a_n|$，故 a_n 不趋于零，级数 ① 发散，因而原级数的收敛区间为$(-4,4)$

1° 当 $x\in[0,4)$ 时，令 $x=(2t)^2, 0\leqslant t<1$，此时级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(2t)^{2n}=F(t), \quad t\in[0,1).$$

于是 $$(1-t^2)F(t)-1=\frac{t}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}4n(2t)^{2n-1},$$

由 3028 题结论有

$$(1-t^2)F(t)-1=\frac{t}{4}[2(\arcsin t)^2]'$$

$$=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t, t\in[0,1),$$

从而 $$F(t)=\frac{1}{1-t^2}\left(1+\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t\right),t\in[0,1).$$

把 $t=\frac{\sqrt{x}}{2}$,代入上式有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n=\frac{4}{4-x}+\frac{4\sqrt{x}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2},x\in[0,4).$$

2° 当 $x\in(-4,0)$ 时,令 $x=-(2t)^2,t\in(0,1)$,此时级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(-1)^n(2t)^{2n}$$
$$=G(t),t\in(0,1).$$

经计算有

$$1-(1+t^2)G(t)$$
$$=t\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}n(2t)^{2n-1}$$
$$=t\cdot g(t),t\in(0,1),$$

其中 $$g(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}n(2t)^{2n-1}.\qquad ②$$

易知②式右端级数的收敛半径为1,从而,当 $t\in(-1,1)$ 时,可逐项求导,有

$$g'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}2n(2n-1)(2t)^{2n-2}.$$

由计算知

$$(1+t^2)g'(t)+t\cdot g(t)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}\cdot 2n(2n-1)(2t)^{2n-2}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}\frac{1}{2}n(2n-1)(2t)^{2n}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}\cdot\frac{n}{2}(2t)^{2n}$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}2n(2n-1)(2t)^{2n-2}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}n^2(2t)^{2n}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(n!)^2}{(2n+2)!}2(n+1)(2n+1)(2t)^{2n}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}n^2(2t)^{2n} = 1,\ t \in (-1,1),$$

即
$$\sqrt{1+t^2}g'(t) + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, t \in (-1,1).$$

对上式两边求积有

$$\sqrt{1+t^2}g(t) = \ln(t+\sqrt{1+t^2}) + c, t \in (-1,1).$$

由 $g(0) = 0$,知 $c = 0$,因此

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\ln(t+\sqrt{1+t^2}), t \in (-1,1).$$

又
$$G(t) = \frac{1}{1+t^2}[1 - t \cdot g(t)], t \in (0,1),$$

将 $t = \frac{\sqrt{-x}}{2} = \frac{\sqrt{|x|}}{2}$,代入上式有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$$

$$= \frac{4}{4-x} - \frac{4\sqrt{|x|}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}} \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{|x|}+\sqrt{4-x}}{2}\right),$$

$$x \in (-4,0).$$

【3030】 $\frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \cdots.$

解　由题意 x 不等于负整数,

令　$u_n = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}, n = 1,2,3,\cdots,$

现研究 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的收敛性及其和.

我们知道当 $x \neq 1$ 时

$$\frac{1}{x-1}=\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x+1}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)$$
$$=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x-1}$$
$$=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x+2}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$$
$$=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x+2}$$
$$+\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x+2}\cdot\frac{3}{x-1}$$
$$=\frac{1!}{x+1}+\frac{2!}{(x+1)(x+2)}$$
$$+\frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$
$$+\frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)}\cdot\frac{4}{x-1}$$
$$=\cdots$$
$$=\frac{1!}{x+1}+\frac{2!}{(x+1)(x+2)}$$
$$+\frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$
$$+\cdots+\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$
$$+\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\cdot\frac{n+1}{x-1}$$
$$=u_1+u_2+\cdots+u_n+R_n, \qquad ①$$

其中 $$R_n=u_n\cdot\frac{n+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{x+k}$$
$$=\frac{1}{x-1}\prod_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{x}{k}}=\frac{1}{x-1}\prod_{k=1}^{n}(1+\alpha_k),$$

这里(当 k 充分大时)

$$\alpha_k = \frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{x}{k}} - 1 = \left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1} - 1$$

$$= \frac{1-x}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \qquad ②$$

由 ① 式知，只要研究 R_n 有无极限即可.

令 $\quad v_n = \prod_{k=1}^{n}(1+\alpha_n),$

分两种情形来讨论：

1° $\ x > 1$ 时，此时

$$0 < 1+\alpha_k = \frac{k+1}{x+k} < 1, k = 1,2,\cdots,$$

于是 $\quad \ln v_n = \sum_{k=1}^{n}\ln(1+\alpha_n), \ln(1+\alpha_n) < 0,$

$$\alpha_k < 0, k = 1,2,3\cdots, \alpha_k \to 0. \qquad ③$$

由 ② 和 ③ 式及 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ 发散知

$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ 发散，且 $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k = -\infty$. 于是，由

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln(1+\alpha_k)}{\alpha_k} = 1$$

知级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+\alpha_k)$ 发散，且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+\alpha_k) = -\infty,$$

因而 $\quad \lim_{n\to\infty}\ln v_n = -\infty.$

从而 $\quad \lim_{n\to\infty}v_n = 0,$

故 $\quad \lim_{n\to\infty}R_n = 0.$

于是由 ① 有

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x-1} - R_n\right) = \frac{1}{x-1}.$$

2° $x<1$ 时，x 不是负整数，又 $x=0$ 时，原级数为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}1$，发散. 故可设 $-m<x<-m+1$，m 为某非负整数，于是

$$1+\alpha_k=\frac{k+1}{x+k}<0, k=1,2,\cdots,m-1,$$

$$1+\alpha_k=\frac{k+1}{x+k}>0, k=m,m+1,\cdots.$$

令 $$S_n=\prod_{k=m}^{n}(1+\alpha_k), n=m,m+1,\cdots,$$

则 $$\ln S_n=\sum_{k=m}^{n}\ln(1+\alpha_n), n=m,m+1,\cdots.$$

由 ② 知，当 k 充分大时，$\alpha_k>0$，且级数 $\sum\limits_{k=m}^{\infty}\alpha_k$ 发散.

类似于 1° 知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1+\alpha_k)$ 发散，且

$$\sum_{k=m}^{\infty}\ln(1+\alpha_k)=+\infty,$$

因而 $$\lim_{n\to\infty}\ln S_n=+\infty,$$

故 $$\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty.$$

于是 $$\lim_{n\to\infty}R_n=\pm\infty.$$

其中的正负号随 m 是 $2,4,6,\cdots$ 之一或 $0,1,3,5,\cdots$ 之一而定，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

3° $x=1$ 时，原级数为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}$，发散.

综上所述，原级数在 $x>1$ 时收敛，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}=\frac{1}{x-1}.$$

【3031】 $\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}+\cdots$，在 $x>0$，$a_n>0(n=1,2,\cdots)$ 条件下，其中级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 为发散级数.

解　令

$$S_n=\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}\cdots\frac{a_n}{a_{n+1}+x},n=1,2,3,\cdots.$$

由 $x>0,a_n>0$ 我们有

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{x}&=\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2+x}{x}=\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{x}\\&=\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}\cdot\frac{a_3}{x}\\&=\cdots\\&=\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}+\cdots\\&\quad+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_n+x}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}+x}\\&\quad+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_n+x}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}+x}\cdot\frac{a_{n+1}}{x}\\&=\sum_{k=1}^{n}S_k+R_n,\end{aligned}\tag{1}$$

其中

$$\begin{aligned}R_n&=\frac{a_{n+1}}{x}\cdot S_n\\&=\frac{a_1}{x}\cdot\frac{a_2}{a_2+x}\cdot\frac{a_3}{a_3+x}\cdots\frac{a_n}{a_n+x}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+x}\\&=\frac{a_1}{x}\prod_{k=2}^{n+1}\frac{a_k}{a_k+x}=\frac{a_1}{x}\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{x}{a_k+x}\right)\\&=\frac{a_1}{x}\prod_{k=2}^{n+1}(1+\alpha_k),\end{aligned}\tag{2}$$

$$\alpha_k=-\frac{x}{a_k+x},k=2,3,\cdots,n+1,\tag{3}$$

由 ① 知，只要研究 R_n 有关极限.

因为　$-1<\alpha_k<0,0<1+\alpha_k<1,k=2,3,\cdots,$

令　$u_n=\prod\limits_{k=2}^{n+1}(1+\alpha_k),$

则　$\ln u_n=\sum\limits_{k=2}^{n+1}\ln(1+\alpha_k),$

我们知道$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{a_k+x}$是发散的，事实上，由$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}$的发散性.

1° 若

$$a_k \geqslant x, k=2,3,\cdots,$$

则
$$a_k+x \leqslant 2a_k,$$

即
$$\frac{1}{a_k+x} \geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_k}.$$

由$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{a_k}$发散(无界)知$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{a_k+x}$发散.

2° 若除有限个a_k之外均有$a_k \geqslant x$，则仍有上述结论.

3° 若 $\exists\{a_{k_i}\}$，使$a_{k_i}<x, i=1,2,3,\cdots$，则我们有

$$a_{k_i}+x<2x,$$

即
$$\frac{1}{a_{k_i}+x}>\frac{1}{2x},(i=1,2,\cdots).$$

显然有

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{a_{k_i}+x}>\frac{N}{2x}\to+\infty,(N\to\infty).$$

于是级数$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{a_k+x}$发散.

故
$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{a_k+x}=+\infty, \sum_{k=2}^{\infty}\alpha_k=-\infty.$$

又
$$-1<\alpha_k<0, \ln(1+\alpha_k)<\alpha_k<0, k=2,3,\cdots,$$

知
$$\sum_{k=2}^{\infty}\ln(1+\alpha_k)=-\infty.$$

因此
$$\lim_{n\to\infty}\ln u_n=-\infty, u_n\to 0, R_n\to 0.$$

于是原级数收敛，且

$$\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}+\cdots=\frac{a_1}{x}.$$

【3032】 若(1) $|x|<1$；(2) $|x|>1$

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^8}+\cdots.$$

解 令

$$S_n = \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}, n=0,1,2,\cdots \mid x \mid \neq 1.$$

当 $|x| \neq 1$ 时,我们有

$$\frac{x}{1-x} = \frac{x}{1-x^2}(1+x) = \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$= \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4}(1+x^2)$$

$$= \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^4} = \cdots$$

$$= \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \cdots + \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} + \frac{x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

$$= S_1 + S_2 + \cdots S_n + R_n,$$

其中 $$R_n = \frac{x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}},$$

(1) 当 $|x| < 1$ 时,显然

$$R_n = \frac{|x|^{2^{n+1}}}{1-|x|^{2^{n+1}}} \to 0, (n \to \infty).$$

于是有 $$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} S_k = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{x}{1-x} - R_N\right) = \frac{x}{1-x}.$$

(2) 当 $|x| > 1$ 时,由

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|x|}\right)^{2^{n+1}} = 0,$$

有 $$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x|^{2^{n+1}}}{1-|x|^{2^{n+1}}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\left(\frac{1}{|x|}\right)^{2^{n+1}} - 1}\right\} = 1.$$

于是 $$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} S_k = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{x}{1-x} - R_N\right)$$

$$= \frac{x}{1-x} + 1 = \frac{1}{1-x}.$$

【3033】 若(1) $|x|<1$;(2) $|x|>1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}.$$

解 令

$$v_n=\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})},n=1,2,\cdots,\ |x|\neq 1.$$

由于

$$\frac{1}{1-x^n}-\frac{1}{1-x^{n+1}}=\frac{x^n(1-x)}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$$

$$=\frac{1-x}{x}\cdot\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}=\frac{1-x}{x}v_n,$$

于是

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1-x}{x}v_k=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{1-x^k}-\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{1-x^{k+1}}$$

$$=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{N+1}},$$

即

$$\sum_{k=1}^{N}v_n=\frac{x}{(1-x)^2}-\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^{N+1}}.$$

(1) 当 $|x|<1$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}v_k=\frac{x}{(1-x)^2}-\frac{x}{1-x}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{1-x^{N+1}}$$

$$=\frac{x}{(1-x)^2}-\frac{x}{1-x}=\frac{x^2}{(1-x)^2}.$$

(2) 当 $|x|>1$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}v_k=\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{x}{1-x}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{x^{N+1}-1}$$

$$=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

§8. 用级数求解定积分

用级数的被积函数展开式计算以下积分(3034 ~ 3040).

【3034】 $\int_0^1\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x.$

解 $\int_0^1\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\int_0^1\ln(1-x)\mathrm{d}x$

$$=-\int_0^1\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\right)dx$$

$$=\int_0^1 x dx+\int_0^1\frac{x^2}{2}dx+\int_0^1\frac{x^3}{3}dx+\cdots$$

$$=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots=1.$$

注意:因为 $\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots$,当 $x=1$ 时发散,于是在[0,1]上逐项积分的合理性需要证明.

任意 $\tau\in(0,1)$,

有 $$\int_0^\tau\ln(1-x)dx=\int_0^\tau\left(-x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^n}{n}\right)dx+R_n, \quad ①$$

其中 $$R_n=\int_0^\tau\left(-\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{x^{n+2}}{n+2}-\cdots\right)dx.$$

因为 $0<\tau<1$,因而在 $[0,\tau]$ 上逐项积分是合理的

又 $$0>R_n=-\left[\frac{\tau^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+\frac{\tau^{n+3}}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right]$$

$$>-\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right]$$

$$=-\left[\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\cdots\right]$$

$$=-\frac{1}{n+1},$$

于是由 ① 式有

$$\left|\int_0^\tau\ln(1-x)dx-\left(-\frac{\tau^2}{1\cdot 2}-\frac{\tau^3}{2\cdot 3}-\cdots-\frac{\tau^{n+1}}{n(n+1)}\right)\right|$$

$$<\frac{1}{n+1}. \quad ②$$

在 ② 中,n 固定,令 $\tau\to 1^-$(广义积分 $\int_0^1\ln(1-x)dx$ 收敛)有

$$\left|\int_0^1\ln(1-x)dx-\left(-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}-\cdots-\frac{1}{n(n+1)}\right)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{n+1},n=1,2,3,\cdots,$$

于是 $$\int_0^1 \ln(1-x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}-\cdots-\frac{1}{n(n+1)}\right)$$
$$=-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}-\cdots.$$

因而 $$\int_0^1\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}-\cdots\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1(-x)\mathrm{d}x+\int_0^1\left(-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_0^1\left(-\frac{x^3}{2}\right)\mathrm{d}x+\cdots$$

也就是逐项积分公式成立.

本节下面的各题,凡在端点发散的级数的逐项积分合理性问题,都可类似地证明,不再一一列出.

【3035】 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\mathrm{d}x.$

解 由 2871 题结论有

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1 \frac{x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right\}}{x}\mathrm{d}x$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

【3036】 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x.$

解 由 2961 题结论有

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots}{x}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\cdots\right)\mathrm{d}x$$
$$=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots=\frac{\pi^2}{12}.$$

【3037】 $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^q)\mathrm{d}x\quad(p>0,q>0).$

解 $\int_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^q)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1 x^{p-1}\left(-x^q-\frac{x^{2q}}{2}-\frac{x^{3q}}{3}-\cdots\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1\left(x^{p-1+q}+\frac{1}{2}x^{p+2q-1}+\frac{1}{3}x^{p+3q-1}+\cdots\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\left(\frac{1}{p+q}+\frac{1}{p+2q}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{p+3q}\cdot\frac{1}{3}+\cdots\right)$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+nq)}.$$

【3038】 $\int_0^1\ln x\cdot\ln(1-x)\mathrm{d}x.$

解 $\int_0^1\ln x\cdot\ln(1-x)\mathrm{d}x=-\int_0^1\ln x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)\mathrm{d}x$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\ln x\Big|_0^1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)^2}\Big|_0^1$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$=1-\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)=2-\frac{\pi^2}{6}.$$

【3039】 $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2\pi x}-1}.$

解 $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2\pi x}-1}=\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-2\pi x}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi x}}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2\pi x}(1+\mathrm{e}^{-2\pi x}+\mathrm{e}^{-4\pi x}+\cdots)\mathrm{d}x$$

$$=\left[-\frac{x}{2\pi}\mathrm{e}^{-2\pi x}-\frac{1}{(2\pi)^2}\mathrm{e}^{-2\pi x}\right]\Big|_0^{+\infty}$$

$$+\left[-\frac{x}{4\pi}\mathrm{e}^{-4\pi x}-\frac{1}{(4\pi)^2}\mathrm{e}^{-4\pi x}\right]\Big|_0^{+\infty}$$

$$+\left[-\frac{x}{6\pi}\mathrm{e}^{-6\pi x}-\frac{1}{(6\pi)^2}\mathrm{e}^{-6\pi x}\right]\Big|_0^{+\infty}+\cdots$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{24}.$$

【3040】 $\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

解 $\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1} = \int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

$$= \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}-\cdots)\mathrm{d}x$$

$$= \left[-x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}\right]\Big|_0^{+\infty} - \left[-\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x}-\frac{1}{2^2}\mathrm{e}^{-2x}\right]\Big|_0^{+\infty}$$

$$+\left[-\frac{x}{3}\mathrm{e}^{-3x}-\frac{1}{3^2}\mathrm{e}^{-3x}\right]\Big|_0^{+\infty} - \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots = \frac{\pi^2}{12}.$$

【3041】 按照模 $k(0 \leqslant k < 1)$ 的正整数幂展开第一型完全椭圆积分：

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

解 $F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi+\frac{3}{8}k^4\sin^4\varphi+\frac{5}{16}k^6\sin^6\varphi+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}\varphi+\cdots\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 k^{2n}\right\},\text{(2281 题结论)}.$$

【3042】 按照模 $k(0 \leqslant k < 1)$ 的正整数幂展开第二型完全椭圆积分：

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi.$$

解 $E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}\varphi\right\}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\cdot\frac{k^{2n}}{2n-1}\right\}.$$

【3043】 用按照离心率正整数幂展开的级数来表示下列椭圆的弧长：

$$x=a\cos t, x=b\sin t \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

解 设 $a>b$，则

$$\mathrm{e}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a},\left(\frac{b}{a}\right)^2=1-\mathrm{e}^2.$$

弧长为 $S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}\,\mathrm{d}t$

$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\mathrm{e}^2\cos^2t}\,\mathrm{d}t$$

$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\mathrm{e}^{2n}\cos^{2n}t\right\}\mathrm{d}t$$

$$=4a\cdot\frac{\pi}{2}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\cdot\frac{\mathrm{e}^{2n}}{2n-1}\right\}$$

$$=2\pi a\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{e}^2-\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\cdot\frac{\mathrm{e}^4}{3}-\cdots\right\}.$$

证明下列等式(3044 ～ 3046).

【3044】 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}.$

证 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^x}=\int_0^1\mathrm{e}^{-x\ln x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1\left(1-x\ln x+\frac{1}{2!}x^2\ln^2x-\frac{1}{3!}x^3\ln^3x+\cdots\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left[x-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{2!\cdot 3}\ln^2x-\frac{x^3}{3^2}\ln x+\frac{x^3}{3^3}-\frac{x^4}{3!\cdot 4}\ln^3x\right.$$

$$\left.+\frac{x^4}{2\cdot 4^2}\ln^2-\frac{x^4}{4^3}\ln x+\frac{x^4}{4^4}+\cdots\right]\Bigg|_0^1$$

$$=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}.$$

【3045】 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sin ax\,dx = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}a^{2n+1}$.

证 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sin ax\,dx$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}x^{2n+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}e^{-t}\left[t^n + nt^{n-1} + n(n-1)t^{n-2} + \cdots + n!t + n!\right]\Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}a^{2n+1}.$$

【3046】 $\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx\,dx = \frac{\pi}{n!}$, $(n = 0,1,2,\cdots)$.

证 令 $z = u + iv$，记 $R(z) = u$ 为实部，于是

$$\mathrm{Re}(e^{e^{ix}}) = e^{\cos x}\cos(\sin x).$$

故
$$I_n = \int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx\,dx$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\int_0^{2\pi} e^{e^{ix}}\cos nx\,dx\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\int_0^{2\pi} e^{e^{ix}}\cdot\frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx})\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_0^{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(e^{ix})^m}{m!}(e^{inx} + e^{-inx})\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\frac{1}{m_1!}\mathrm{Re}\left\{\int_0^{2\pi} e^{i(m_1+n)x}\,dx\right\} + \sum_{m_2=0}^{\infty}\frac{1}{m_2!}\mathrm{Re}\left\{\int_0^{2\pi} e^{i(m_2-n)x}\,dx\right\}\right].$$

又任 $k\in\mathbb{Z}$，有

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx}\,dx=\begin{cases}2\pi, & k=0,\\ 0, & k\neq 0.\end{cases}$$

于是，当 $n\geqslant 0, m\geqslant 0$ 时，

1° 当 $m=0$ 时，

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m+n)x}\,dx=\begin{cases}2\pi, & m=0,\\ 0, & m\neq 0.\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x}\,dx=\begin{cases}2\pi, & m=0,\\ 0, & m\neq 0.\end{cases}$$

相应地有 $I_0=\frac{1}{2}(2\pi+2\pi)=2\pi$.

2° 当 $n=1,2,3,\cdots$ 时，

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m+n)x}\,dx=0,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x}\,dx=\begin{cases}2\pi, & m=n,\\ 0, & m\neq n.\end{cases}$$

于是相应地有

$$I_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n!}2\pi\right)=\frac{\pi}{n!}.$$

求解(3047 ~ 3050).

【3047】 $\int_0^{2\pi} e^{a\cos x}\cos(a\sin x-nx)\,dx$，($n$ 为自然数).

解 被积函数是 $e^{ae^{ix}-inx}$ 的实部，即

$$\mathrm{Re}\{e^{ae^{ix}-inx}\}\,dx=e^{a\cos x}\cos(a\sin x-nx)\,dx,$$

于是

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi} e^{a\cos x}\cos(a\sin x-nx)\,dx\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\{e^{ae^{ix}-inx}\}\,dx=\mathrm{Re}\left\{\int_0^{2\pi} e^{ae^{ix}}e^{-inx}\,dx\right\}\\&=\mathrm{Re}\left\{\int_0^{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(ae^{ix})^m}{m!}e^{-inx}\,dx\right\}\\&=\mathrm{Re}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x}\,dx\right\}\end{aligned}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\frac{a^n}{n!}\cdot 2\pi + \sum_{\substack{m=0\\m\neq n}}^{\infty}\frac{a^m}{m!}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x}\mathrm{d}x\right\} = \frac{2\pi a^n}{n!}.$$

【3048】 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin\alpha}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}\mathrm{d}x$.

解 由 2864 题结论有

$$\frac{x\sin x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}x\sin nx,\ |\alpha|<1,$$

又 $$\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x = (-1)^{n-1}\frac{\pi}{n},$$

所以,当 $|\alpha|<1$ 时,有

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\,\mathrm{d}x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\alpha^{n-1}\frac{\pi}{n}$$

$$= \frac{\pi}{\alpha}\ln(1+\alpha).$$

当 $|\alpha|>1$ 时,$\left|\frac{1}{|\alpha|}\right|<1$,

$$\frac{x\sin x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{x\sin x}{1-2\left(\frac{1}{\alpha}\right)\cos x+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2},$$

于是当 $|\alpha|>1$ 时,

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\alpha}\ln\left(1+\frac{1}{\alpha}\right).$$

【3049】 $\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\mathrm{d}x$.

解 由 2872 题结论知,当 $|\alpha|\leqslant 1$ 时,

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\mathrm{d}x = -2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\alpha^n\cos nx}{n}\mathrm{d}x$$

$$= 0.$$

当 $|\alpha|>1$,即当 $\left|\frac{1}{\alpha}\right|<1$ 时,

$$\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2) = \ln\left[\alpha^2\left(1-2\frac{1}{\alpha}\cos x+\frac{1}{\alpha^2}\right)\right]$$

$$= \ln\alpha^2 + \ln\left(1 - \frac{2}{\alpha}\cos\alpha + \frac{1}{\alpha^2}\right),$$

于是当 $|\alpha| > 1$ 时，

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\mathrm{d}x = \pi\ln\alpha^2 = 2\pi\ln|\alpha|.$$

【3050】 证明公式：

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{a+x}\mathrm{d}x = \frac{1}{a} - \frac{1!}{a^2} + \frac{2!}{a^3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{a^n} + (-1)^n\frac{\theta_n n!}{a^{n+1}}, \qquad ①$$

其中 $a > 0$ 与 $0 < \theta_n < 1$.

若在公式 ① 中取两项来表示积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{100+x}\mathrm{d}x$$

其精确度是多少?

证　当 $x \geqslant 0$ 时，令 $f(x) = \dfrac{1}{x+a}$，在 $x = 0$ 的泰勒公式是

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x+a} \\
&= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots \\
&\quad + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n \\
&= \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{a^n} \\
&\quad + (-1)^n\frac{1}{(a+\theta x)^{n+1}}x^n \\
&= \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{a^n} \\
&\quad + (-1)^n\frac{x^n}{a^{n+1}} \cdot \frac{1}{\left(1+\theta \cdot \dfrac{x}{a}\right)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{a^n}
\end{aligned}$$

$$+(-1)^n\bar{\theta}_n(x)\frac{x^n}{a^{n+1}},$$

其中 $0<\theta<1,\bar{\theta}_n(x)=\dfrac{1}{\left(1+\theta\dfrac{x}{a}\right)^{n+1}}.$

于是 $0<\bar{\theta}_n(x)<1,x\in(0,\infty).$

由 $\int_0^{+\infty}e^{-x}x^n\mathrm{d}x=n!,n=0,1,2,\cdots,$

及 $0<\int_0^{+\infty}e^{-x}\bar{\theta}_n(x)x^n\mathrm{d}x<\int_0^{+\infty}e^{-x}x^n\mathrm{d}x=n!,$

知 $\int_0^{+\infty}e^{-x}\bar{\theta}_n(x)x^n\mathrm{d}x=\theta_n n!$,其中 $\theta_n\in(0,1)$.

从而
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{a+x}\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}f(x)e^{-x}\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{a^k}\int_0^{+\infty}x^{k-1}e^{-x}\mathrm{d}x\\&\quad+(-1)^n\frac{1}{a^{n+1}}\int_0^{+\infty}\theta_n(x)x^ne^{-x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{a}-\frac{1!}{a^2}+\frac{2!}{a^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{a^n}\\&\quad+(-1)^n\frac{n!}{a^{n+1}}\theta_n,\end{aligned}$$

在上述公式中,令 $a=100=10^2$,有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{100+x}\mathrm{d}x=10^{-2}-1!10^{-4}+2!10^{-6}-\cdots\\+(-1)^{n-1}(n-1)!10^{-2n}\\+(-1)^n\theta_n n!10^{-2n-2},0<\theta_n<1.\end{aligned}$$

令 $n=2$,则误差为 $(-1)^2\theta_2 2!10^{-6}$,其绝对值小于 $2\cdot10^{-6}$,于是

$$\left|\int_0^{+\infty}\frac{e^x}{100+x}\mathrm{d}x-0.01-0.0001\right|$$
$$\leqslant 0.000002=2\cdot10^{-6}.$$

§9. 无穷乘积

1. 无穷乘积的收敛性 若存在有穷的非零极限：

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{\infty}p_i=\lim_{n=\infty}P_n=P,$$

则无穷乘积

$$p_1p_2,\cdots p_n\cdots=\prod_{n=1}^{\infty}p_n, \quad ①$$

称为是收敛的.

若 $P=0$ 而乘数 p_n 中没有一个等于零，则乘积①称为是发散于零，反之则称为收敛于零.

$\lim\limits_{n\to\infty}p_n=1$ 是收敛的必要条件.

乘积 ① 的收敛等价于以下级数的收敛：

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\ln p_n, \quad ②$$

若 $p_n=1+\alpha_n(n=1,2,\cdots)$ 与 α_n 不改变符号，则对于乘积①收敛充要级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\sum_{n=1}^{\infty}(p_n-1), \quad ③$$

收敛

通常，当 α_n 不保持固定的符号而级数③收敛时，乘积①将与以下级数同时收敛或发散到零：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}(p_n-1)^2.$$

2. 绝对收敛 乘积 ① 称为绝对或条件(非绝对) 收敛取决于级数 ② 是绝对收敛还是有条件收敛. 级数 ③ 绝对收敛是乘积 ① 绝对收敛的充要条件.

3. 函数的无穷乘积展开 当 $-\infty<x<+\infty$ 时，以下展开式成立：

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty}\left[1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2 n^2}\right]$$

特别是由第一式当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时，得出沃利斯公式：

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}.$$

证明以下等式(3051 ～ 3060).

【3051】 $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$

证 令

$$p_n = 1 - \frac{1}{n^2},$$

由部分乘积

$$P_n = \prod_{i=2}^{n} p_i = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n},$$

于是 $$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

【3052】 $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}.$

证 令

$$p_n = \frac{n^3-1}{n^3+1},$$

而 $$P_n = \prod_{i=2}^{\infty} p_i = \frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}$$
$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n+1)},$$

于是 $$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty}P_n = \frac{2}{3}.$$

【3053】 $\prod_{n=2}^{\infty}\left[1-\frac{2}{n(n+1)}\right]=\frac{1}{3}.$

证 令

$$p_n = 1 - \frac{2}{n(n+1)},$$

由 $$P_n = \prod_{i=2}^{\infty} p_i = \frac{4 \cdot 1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdots \frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{n+2}{n},$$

有 $$\prod_{n=2}^{\infty}\left[1 - \frac{2}{n(n-1)}\right] = \lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{3}.$$

【3054】 $$\prod_{n=0}^{\infty}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right] = 2.$$

证　由

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)P_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}},$$

有 $$P_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}},$$

于是 $$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right) = 2.$$

【3055】 $$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}.$$

证　由

$$P_n = \cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\left(\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2^n\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}},$$

有 $$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2^n\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}.$$

【3056】 $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$.

证 当 $x\neq 0$ 时,

$$P_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{\sin x}{x},$$

于是 $$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}.$$

【3057】 $\prod_{n=1}^{\infty}\operatorname{ch}\frac{x}{2^n}=\frac{\operatorname{sh}x}{x}$.

证 由

$$P_n=\operatorname{ch}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2^2}\cdots\operatorname{ch}\frac{x}{2^n}$$

$$=\frac{\operatorname{sh}x}{2^n\operatorname{sh}\frac{x}{2^n}}=\frac{\operatorname{sh}x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2^n}},(x\neq 0).$$

又 $$\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{sh}y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\operatorname{ch}y}=1.$$ 故

$$\prod_{n=1}^{\infty}\operatorname{ch}\frac{x}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sh}x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2^n}}=\frac{\operatorname{sh}x}{x}.$$

【3058】 $\prod_{n=0}^{\infty}(1+x^{2^n})=\frac{1}{1-x}\quad(|x|<1)$.

证 由

$$(1-x)P_n=(1-x)(1+x)\cdots(1+x^{2^n})$$
$$=1-x^{2^{n+1}},$$

有　$$P_n=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}.$$

又 $|x|<1$,我们有

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+x^{2^n})=\frac{1}{1-x},$$

由此,我们有

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

【3059】　$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots.$

证　在 3056 题中,令 $x=\frac{\pi}{2}$,由半角公式有

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\cdots,$$

于是　$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots,$$

即　$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots.$$

【3060】　$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{3n-1}\cdot\frac{3n}{3n+1}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$

证　由 $\sin x$ 无穷乘积展开

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

令 $x=\frac{\pi}{3}$ 时,我们有

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(3n)^2}\right)=\frac{\pi}{3}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-1)(3n+1)}{(3n)^2},$$

于是 $$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{3n-1}\cdot\frac{3n}{3n+1}=\frac{\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

证明以下无穷乘积的收敛性并确定其数值(3061 ~ 3064).

【3061】 $\prod_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-4}{n^2-1}$.

证 由

$$P_n=\frac{1\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\frac{2\cdot 6}{3\cdot 5}\cdot\frac{3\cdot 7}{4\cdot 6}\cdots\frac{(n-4)n}{(n-3)(n-1)}\cdot\frac{(n-3)(n+1)}{(n-2)n}\cdot\frac{(n-2)(n+2)}{(n-1)(n+1)}=\frac{n+2}{4(n-1)},$$

有 $$\prod_{n=3}^{\infty}\frac{n^2-4}{n^2-1}=\frac{1}{4},$$

收敛.

【3062】 $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]$.

证 由

$$1+\frac{1}{n(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)},$$

有

$$P_n=\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdots\frac{(n-1)^2}{(n-2)n}\cdot\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}\cdot\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\frac{2(n+1)}{n+2},$$

于是 $$\lim_{n\to\infty}P_n=2.$$

从而该无穷乘积收敛,且其值为 2.

【3063】 $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$.

证 由

$$P_n = \frac{3\cdot 9}{5\cdot 7}\cdot\frac{5\cdot 11}{7\cdot 9}\cdot\frac{7\cdot 13}{9\cdot 11}\cdots\frac{(2n-3)(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\cdot\frac{(2n-1)(2n+5)}{(2n+1)(2n+3)}\cdot\frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$$

$$=\frac{3}{7}\cdot\frac{2n+7}{2n+3},$$

有 $$\lim_{n\to\infty}P_n=\frac{3}{7}.$$

于是该无穷乘积收敛，且其值为$\frac{3}{7}$.

【3064】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}a^{\frac{(-1)^n}{n}}$,$(a>0)$.

证 由

$$P_n = a^{-1}\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdots a^{\frac{(-1)^n}{n}} = a^{-\left(1-\frac{1}{2}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n}\right)},$$

有 $$\lim_{n\to\infty}P_n = a^{-\ln 2}.$$

于是该无穷乘积收敛，且其值为 $a^{-\ln 2}$.

【3065】 能否由乘积$\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$与$\prod\limits_{n=1}^{\infty}q_n$的收敛性得出下列乘积的收敛性？

(1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n)$; (2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n^2$; (3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_nq_n$; (4) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{q_n}$.

证 (1) 不可以，如$\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$,$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$皆收敛，但

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]=\sum_{n=2}^{\infty}2,$$

发散.

(2) 可以，事实上，部分乘积

$$Q_n = p_1^2\cdot p_2^2\cdots p_n^2=(p_1\cdots p_n)^2,$$

于是 $$\lim_{n\to\infty}Q_n=\lim_{n\to\infty}(p_1\cdots p_n)^2=P^2,$$

其中 $$P=\sum_{n=1}^{\infty}p_n\neq 0.$$

(3) 可以,事实上,部分乘积

$$A_n = (p_1 p_2 \cdots p_n)(q_1 q_2 \cdots q_n),$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = PQ,$

其中 $P = \prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n, \prod\limits_{n=1}^{\infty} q_n = Q \neq 0.$

(4) 可以,事实上,部分乘积

$$A_n = \frac{p_1 p_2 \cdots p_n}{q_1 q_2 \cdots q_n}, (q_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots),$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \frac{P}{Q},$

其中 $P = \prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n \neq 0, \prod\limits_{n=1}^{\infty} q_n = Q \neq 0.$

研究以下无穷乘积的收敛性(3066 ~ 3085)

【3066】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$

解 令 $p_n = \frac{1}{n},$

有 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0.$

于是不满足收敛的必要条件,又

$$P_n = \frac{1}{n!},$$

有 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0.$

所以该无穷乘积发散于零.

【3067】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$

解 令

$$p_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)},$$

于是 $p_n = 1 + \frac{1}{n(n+2)},$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ 收敛,且 $\frac{1}{n(n+2)}$ 不变号,因而该无穷乘积收敛.

【3068】 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$.

解 令 $p_n=1+\frac{1}{n^p}$,

其中$\frac{1}{n^p}$不变号,又$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$当$p>1$时收敛,当$p\leqslant 1$时发散,于是该无穷乘积在$p>1$时收敛,在$p\leqslant 1$时发散.

【3069】 $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

解 令 $p_n=1-\frac{1}{n}$,

又$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$发散,且$-\frac{1}{n}$不变号,故该无穷乘积发散.

注:因

$$P_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n},$$

有 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=0.$

于是,该无穷级数发散于零.

【3070】 $\prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$.

解 令

$$p_n=\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p=\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)^p,$$

由

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)^p=p\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right),$$

对任何p皆收敛,于是该无穷乘积,对任何p皆收敛.

【3071】 $\prod_{n=n_0}^{\infty}\frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}$,其中当$n\geqslant n_0$时,$n^2+an+b>0$.

解 令

$$p_n=\frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}=1+\frac{(a_1-a)n+(b_1-b)}{n^2+an+b},$$

于是可令 $\alpha_n=\dfrac{(a_1-a)n+(b_1-b)}{n^2+an+b}$，当 $a_1=a$ 时，$\alpha_n\sim\dfrac{1}{n^2}$，由 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛知，该无穷乘积收敛，当 $a_1\neq a$ 时，由 $n^2+an+b>0$，且 $\alpha_n\sim\dfrac{a_1-a}{n}$，知该无穷乘积发散.

【3072】 $\prod\limits_{n=n_0}^{\infty}\dfrac{(n-a_1)(n-a_2)\cdots(n-a_p)}{(n-b_1)(n-b_2)\cdots(n-b_p)}$

其中 $n_0>b_i(i=1,2,\cdots p)$.

解 令

$$p_n=\frac{(n-a_1)(n-a_2)\cdots(n-a_p)}{(n-b_1)(n-b_2)\cdots(n-b_p)},$$

于是 $p_n=1+\dfrac{(\sum\limits_{i=1}^{p}b_i-\sum\limits_{i=1}^{p}a_i)n^{p-1}+\cdots+(-1)^p(\prod\limits_{i=1}^{p}a_i-\prod\limits_{i=1}^{p}b_i)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(n-b_i)}$,

令 $$\alpha_n=\frac{(\sum\limits_{i=1}^{p}b_i-\sum\limits_{i=1}^{p}a_i)n^{p-1}+\cdots+(-1)^p(\prod\limits_{i=1}^{p}a_i-\prod\limits_{i=1}^{p}b_i)}{\prod\limits_{i=1}^{p}(n-b_i)},$$

当 $\sum\limits_{i=1}^{p}a_i=\sum\limits_{i=1}^{p}b_i$ 时，$\alpha_n=\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$，从而该无穷乘积收敛.

当 $\sum\limits_{i=1}^{p}a_i\neq\sum\limits_{i=1}^{p}b_i$ 时，由当 $n>n_0$ 时，

$$\prod_{i=1}^{p}(n-b_i)>0,$$

且 $$\alpha_n\sim\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{p}(b_i-a_i)\right),$$

于是 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\alpha_n$ 发散，从而该无穷乘积发散.

【3073】 $\prod\limits_{n=0}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n+1}{n+2}}$.

解　令 $p_n=\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$,

有　$$\ln p_n=\frac{1}{2}\ln\frac{n+1}{n+2}=\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right),$$

由 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)$ 发散，于是原无穷乘积发散.

【3074】　$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

解　令

$$p_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}},$$

有　$$\ln p_n=-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right),$$

因为　$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right),$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 收敛，从而该无穷乘积收敛.

【3075】　$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$.

解　令 $p_n=\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$,

于是　$$\ln p_n=\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>0.$$

又　$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n^2},$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 收敛. 因此，该无穷乘积也收敛.

【3076】　$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n^2]{n}$.

解　令 $p_n=\sqrt[n^2]{n}$,

于是 $\ln p_n = \frac{1}{n^2}\ln n.$

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ln n,$

而 $\frac{1}{n^2}\ln n = O\left(\frac{1}{n^{1+\epsilon}}\right),$

这里 $\epsilon \in (0,1)$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\epsilon}}$收敛，于是该无穷乘积收敛.

【3077】 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{\frac{-x}{n}}.$

解 令 $p_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}},$

于是 $p_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left[1-\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$

$= 1-\frac{x^2}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$

现记 $p_n = 1+\alpha_n,$

其中 $\alpha_n = -\frac{x^2}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$

当 n 充分大时，有 $\alpha_n < 0$，保持不变号，又任意 $x \in (-\infty, +\infty)$，级数$\sum_{n=n_0}^{\infty}\left[-\frac{x^2}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$收敛，($n_0$ 为适当大的正数)，从而$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛，因此该无穷乘积收敛.

【3078】 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{c+n}\right)e^{\frac{x}{n}}$，其中 $c>0$.

解 任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$，

令 $p_n = \left(1-\frac{x}{c+n}\right)^{e^{\frac{x}{n}}}$

$= \left(1-\frac{x}{c+n}\right)\left[1+\frac{x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$

$= 1-\frac{x}{c+n}+\frac{x}{n}-\frac{x^2}{n(c+n)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$= 1 - \frac{x^2 - cx}{n(c+n)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

于是可设 $p_n = 1 + \alpha_n$,

其中 $\alpha_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

由 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$,

收敛知,该无穷乘积收敛.

【3079】 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)$.

解 当 $|x| \geqslant 1$ 时,

$$p_n = 1 - x^n \nrightarrow 1,$$

于是该无穷乘积发散,当 $|x| < 1$ 时,若 $x = 0$,显然收敛,若 $x \neq 0$,则有

$$\ln p_n = \ln(1 - x^n) = -x^n \ln\left[(1 - x^n)^{-\frac{1}{x^n}}\right],$$

而 $\lim_{n\to\infty} \ln\left[(1 - x^n)^{-\frac{1}{x^n}}\right] = \lim_{y\to\infty} \ln\left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right] = 1$,

其中 $y = -\frac{1}{x^n}$.

于是 $\ln p_n = O(|x|^n)$.

而 $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^n (|x| < 1)$ 收敛,于是当 $|x| < 1$ 时该无穷乘积收敛.

【3080】 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x^n}{2^n}\right)$.

解 当 $|x| \geqslant 2$ 时,

$$p_n = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^n \nrightarrow 1,$$

于是该无穷乘积发散,当 $|x| < 2$ 时,若 $x = 0$,显然收敛,若 $x \neq 0$,由

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \left(\frac{x}{2}\right)^n\right)^{\left(\frac{2}{x}\right)^n} \xlongequal{\text{令 } t = \left(\frac{x}{2}\right)^n} \lim_{t\to 0}(1 + t)^{\frac{1}{t}} = \mathrm{e},$$

有
$$\ln p_n=\ln\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)$$
$$=\frac{x^n}{2^n}\ln\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)^{\left(\frac{2}{x}\right)^n}=O\left(\left|\frac{x}{2}\right|^n\right).$$
而当 $|x|<2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x}{2}\right|^n$ 收敛，于是 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 收敛，故该无穷乘积收敛.

【3081】 $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right]$.

解 1° 当 $|x|<\mathrm{e}$ 时，由
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}+O(1),$$
则存在 $n_0>0$，当 $n\geqslant n_0$ 时，有
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>|x|.$$
于是有
$$\left|\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right|=\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{x}\right]^n>1.$$
从而
$$p_n=1+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\not\to 1,(n\to\infty).$$
于是该无穷乘积发散.

2° 当 $|x|=\mathrm{e}$ 时，由 70 题结论，有
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\mathrm{e}-\frac{3}{n}.$$
此时
$$p_n=1+(\operatorname{sgn}x)^n\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{\mathrm{e}^n}$$
$$=1+(\operatorname{sgn}x)^n\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\mathrm{e}}\right]^n$$
$$=1+\alpha_n,$$

其中 $\alpha_n=(\mathrm{sgn}x)^n\left[\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{\mathrm{e}}\right]^n$.

又 $$|\alpha_n|=\left|(\mathrm{sgn}x)^n\left[\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{\mathrm{e}}\right]^n\right|$$

$$=\left[\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{\mathrm{e}}\right]^n>\left[\dfrac{\mathrm{e}-\dfrac{3}{n}}{\mathrm{e}}\right]^n$$

$$=\left(1-\frac{3}{\mathrm{e}}\cdot\frac{1}{n}\right)^n,$$

且 $$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{\mathrm{e}}\cdot\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{n\mathrm{e}}\right)^{\frac{n\mathrm{e}}{3}}\right]^{\frac{3}{\mathrm{e}}}$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{3}{\mathrm{e}}}>0,$$

于是 $\alpha_n\not\to 0$，从而 $p_n\not\to 1$，故该无穷乘积发散.

3° 当 $|x|>\mathrm{e}$ 时，令 $p_n=1+\alpha_n$，现考察 α_n，

由 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}+O(1),(n\to\infty)$，

存在 $n_0>0$，当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{1}{2}(\mathrm{e}+|x|).$$

记 $q=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{|x|+\mathrm{e}}{|x|}$，

于是 $0<q<1$.

而 $$|\alpha_n|=\left|\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right|=\left[\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{|x|}\right]^n$$

$$<\left[\frac{\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}+|x|)}{|x|}\right]^n=q^n,$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛，因此该无穷乘积收敛.

【3082】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{x^2}{2n}}$.

解 令 $p_n=\left(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)e^{\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{x^2}{2n}}$,

于是 $$p_n=\left(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\left[1+\left(\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{x^2}{\sqrt{2n}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{x^2}{2n}\right)^2+O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)\right]$$

$$=\left[1+\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{x^2}{2n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{n}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)\right]+\left[-\frac{x}{\sqrt{n}}-\frac{x^2}{n}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)\right]$$

$$=1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right),$$

令 $\alpha_n=O\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$,

于是 $p_n=1+\alpha_n$.

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛,知该无穷乘积收敛.

【3083】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{n^p}\right)\cos\frac{x^n}{n^q}$.

解 1° 当 $|x|<1$ 时

$$p_n=\left(1+\frac{x^n}{n^p}\right)\cos\frac{x^n}{n^q}=\left(1+\frac{x^n}{n^p}\right)\left[1+O\left(\frac{x^{2n}}{n^{2q}}\right)\right]$$

$$=1+\frac{x^n}{n^p}+O\left(\frac{x^{2n}}{n^{2q}}\right)+O\left(\frac{x^{3n}}{n^{p+2q}}\right)$$

$$=1+O\left(\frac{x^n}{n^p}\right)+O\left(\frac{x^{3n}}{n^{p+2q}}\right).$$

当 n 充分大时,不论 p,q 为何值,皆有

$$\frac{x^p}{n^p}=O(|x|^{\frac{n}{2}}),\frac{x^{3n}}{x^{p+2q}}=O(|x|^{\frac{n}{2}}),$$

从而 $p_n=1+\alpha_n,\alpha_n=O(|x|^{\frac{n}{2}})$.

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛(因 $|x|<1$),于是 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 收敛.

2° 当 $x=1$ 时，在 $p>1, q>\frac{1}{2}$ 的情形下，由

$$\begin{aligned} p_n &= \left(1+\frac{1}{n^p}\right)\cos\frac{1}{n^q} \\ &= \left(1+\frac{1}{n^p}\right)\left[1-\frac{1}{2n^{2q}}+O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)\right] \\ &= 1+\frac{1}{n^p}-\frac{1}{2n^{2q}}+O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{p+4q}}\right) \\ &= 1+\frac{1}{n^p}+O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right), \end{aligned}$$

令 $\quad p_n = 1+\alpha_n,$

其中 $\quad \alpha_n = \frac{1}{n^p}+O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right).$

于是 $\sum \alpha_n$ 绝对收敛，且

$$\alpha_n^2 = \frac{1}{n^{2q}}+O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{2q+p}}\right) = \frac{1}{n^{2p}}+O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right).$$

从而 $\sum \alpha_n^2$ 收敛，故 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛.

3° 当 $x=-1$ 时，在 $p>\frac{1}{2}, q>\frac{1}{2}$ 的情形下，由

$$\begin{aligned} p_n &= \left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)\cos\frac{(-1)^n}{n^q} \\ &= \left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)\cdot\left[1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{2q}}+O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)\right] \\ &= 1+\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2n^{2q}}+O\left(\frac{1}{n^{p+2q}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{p+4q}}\right) \\ &= 1+\frac{(-1)^n}{n^p}+O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right), \end{aligned}$$

令 $\quad p_n = 1+\beta_n,$

其中 $\quad \beta_n = \frac{(-1)^n}{n^p}+O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right).$

于是 $\quad \ln p_n = \ln(1+\beta_n) = \beta_n + O(\beta_n^2).$

易知 $\sum \beta_n$ 收敛，又

$$\beta_n^2=\frac{1}{n^{2p}}+O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{2q+p}}\right)$$
$$=\frac{1}{n^{2p}}+O\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),$$

知$\sum\beta_n^2$绝对收敛，从而$\sum\ln p_n$收敛，因此，$\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$收敛.

【3084】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^p$.

解 由题意 $x\neq0$，令

$$p_n=(1+\alpha_n)^p,$$

其中
$$\alpha_n=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{x}{n}}-1=\left[1-\frac{x^2}{6n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1$$
$$=-\frac{x^2}{6n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

又
$$\ln p_n=p\ln(1+\alpha_n)=p\ln\left[1-\frac{x^2}{6n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right],$$

由 2677 题知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\alpha_n)$，于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln p_n$收敛，故该无穷乘积收敛.

【3085】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\ln(n+x)-\ln n}$.

解 令 $p_n=\sqrt[n]{\ln(n+x)-\ln n}$，

由题意 $\ln(x+n)-\ln n\geqslant0$，

于是 $x\geqslant0$.

1° 当 $x=0$ 时，各项皆为零，于是无穷乘积收敛于零.

2° 当 $x>0$ 时，由

$$\ln p_n=\frac{1}{n}\ln\ln\left(1+\frac{x}{n}\right),$$

知，当 $n\geqslant\dfrac{x}{e-1}$ 时，有

$$\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\leqslant 1,$$

于是 $$\ln\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\leqslant 0.$$

又 $$\frac{-\frac{1}{n}\ln\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\ln\frac{1}{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}\to+\infty,$$

且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\ln\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$发散，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln p_n$发散，因此该无穷乘积发散.

【3086】 证明：若级数$\prod\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2$收敛，则乘积$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos x_n$收敛.

证 当$x\to 0$时，

$$p_n=\cos x_n=1+\alpha_n,$$

其中 $$\alpha_n=-\frac{1}{2}x_n^2+O(x_n^2),\qquad \alpha_n\leqslant 0,$$

又 $$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{x_n^2}{2}+O(x_n^2)\right],$$

收敛，于是$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos x_n$收敛.

【3087】 证明：若级数$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$绝对收敛，则乘积

$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right)\left(|\alpha_n|<\frac{\pi}{4}\right)$收敛.

证 因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$收敛，于是

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0,$$

令 $$p_n=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right),$$

有 $$p_n=\frac{1+\tan\alpha_n}{1-\tan\alpha_n}=(1+\tan\alpha_n)(1+\tan\alpha_n+\tan^2\alpha_n+\cdots)$$
$$=1+2\tan\alpha_n+2\tan^2\alpha_n+\cdots$$

$$= 1 + 2\alpha_n + o(\alpha_n).$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}[2\alpha_n + o(\alpha_n)]$收敛，对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[2\alpha_n + o(\alpha_n)]^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}4\alpha_n^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \cdot o(\alpha_n) + \sum_{n=1}^{\infty}o^2(\alpha_n), \quad ①$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$绝对收敛，于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2 \leqslant \sum_{s=1}^{\infty}|\alpha_{i_s}|\cdot|\alpha_{k_s}|,$$

当 n 充分大时，有

$$|\alpha_n \cdot o(\alpha_n)| \leqslant |\alpha_n|, \ |o^2(\alpha_n)| \leqslant |\alpha_n|,$$

从而$\sum\alpha_n^2, \sum\alpha_n \cdot o(\alpha_n), \sum o^2(\alpha_n)$皆收敛.

故级数 ① 收敛，从而该无穷乘积收敛.

研究下列无穷乘积的绝对收敛与条件收敛(3088 ～ 3097).

【3088】 $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]$.

解 由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$条件收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]^2$收敛，故该无穷乘积条件收敛.

【3089】 $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right]$.

解 由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$条件收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right]^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散. 因此，该无穷乘积发散.

【3090】 $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right]$.

解 当 $p > 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$绝对收敛，于是无穷乘积绝对收敛.

当$\frac{1}{2}<p\leqslant 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$条件收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right]^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$收敛，故该无穷乘积条件收敛.

当$0<p\leqslant\frac{1}{2}$时，由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$发散，知该无穷乘积发散.

当$p\leqslant 0$时，因$\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$不趋于零，于是该无穷乘积发散.

【3091】 $\prod_{n=2}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{\ln n}\right]$.

解　因为$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$条件收敛，又因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n}=0,$$

知存在$n_0>0$，当$n\geqslant n_0$时，有$\ln^2 n<n$，于是$\frac{1}{\ln^2 n}>\frac{1}{n}$，从而$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$发散，于是该无穷乘积发散.

【3092】 $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

解　令$p_n=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$，

有
$$\ln p_n=\ln\left[1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\right],$$

设　$u_k=\ln p_{2k}+\ln p_{2k+1}$，$k=1,2,3,\cdots$.

有
$$u_k=\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{2k}+1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{2k+1}-1}\right)$$
$$=\ln\left[1-\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}\right]>0.$$

又
$$\lim_{k\to\infty}\ln\left[1-\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}\right]^{-\frac{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}}=1.$$

于是 $$u_k = -\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}$$

$$\cdot \ln\left[1-\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}\right]^{-\frac{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}}$$

$$\sim -\left[\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}\right]\sim \frac{1}{2k},$$

$$(k\to\infty).$$

因而$\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ 发散,故$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln p_n$ 发散,由此,该无穷乘积发散.

【3093】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}$.

解 令 $p_n = n^{(-1)^n}$,

则 $$p_{2k} = (2k)^{(-1)^{2k}} = 2k\to\infty,(k\to\infty).$$

于是 $p_n \nrightarrow 1$,从而该无穷乘积发散.

【3094】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$.

解 令 $p_n = \sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$,

有 $$\ln p_n = \frac{1}{n}\ln n^{(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n}\ln n.$$

又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$ 条件收敛,于是该无穷乘积条件收敛.

【3095】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}\right]$.

解 令

$$p_n = 1+\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n},$$

有 $$|\ln p_n| = \frac{1}{n}\left|\ln\left[1+\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}\right]^{\frac{n}{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}}\right|\sim\frac{1}{n},$$

于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\ln p_n|$ 发散,设

$$v_n = \ln p_n,$$

于是 $$v_{2k-1} = \ln\left[1+\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right],$$

$$v_{2k} = \ln\left[1+\frac{(-1)^k}{2k-1}\right], k = 1,2,3,\cdots.$$

令 $a_k = v_{2k-1} + v_{2k}$,

我们有 $$a_k = \ln\left[1+\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}+\frac{(-1)^k}{2k}+\frac{(-1)^{2k-1}}{2k(2k-1)}\right]$$

$$= \ln\left[1+\frac{(-1)^{k-1}-1}{2k(2k-1)}\right], \qquad k = 1,2,3,\cdots.$$

于是 $$a_{2m-1} = 0, \qquad a_{2m} = \ln\left[1-\frac{2}{4m(4m-1)}\right],$$

$$m = 1,2,3,\cdots.$$

从而 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛，又 $v_k \to 0 (k\to\infty)$，有 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 收敛，因此，该无穷乘积条件收敛.

【3096】 $$\left(1+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\times\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{9}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots.$$

解 无穷乘积的收敛性与级数

$$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{9}}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots. \qquad ①$$

的敛散性一致，于是我们只研究级数 ① 的敛散性就够了，现将级数 ① 每三项依次加括号有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{4n-1}}\right)\right.$$

$$\left.+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{4n+1}}\right)\right]. \qquad ②$$

现考虑 ② 的通项

$$u_n=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{4n-1}}\right)$$

$$+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{4n+1}}\right), \qquad ③$$

$$=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$+\ln\left[1-\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{4n+1}}+\frac{1}{\sqrt{16n^2-1}}\right]$$

$$=\ln\left\{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1-\frac{\sqrt{4n-1}+\sqrt{4n+1}}{\sqrt{16n^2-1}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\sqrt{16n^2-1}}\right)\right\}$$

$$=\ln\left[1+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{4n-1}+\sqrt{4n+1}}{\sqrt{16n^2-1}}\right.$$

$$-\frac{\sqrt{4n-1}+\sqrt{4n+1}}{\sqrt{n}\sqrt{16n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{16n^2-1}}$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{16n^2-1}}\right]$$

$$=\ln\left[1+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{2(\sqrt{n}+1)\left(\sqrt{1-\frac{1}{4n}}+\sqrt{1+\frac{1}{4n}}\right)-1}{\sqrt{16n^2-1}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{16n^2-1}}\right]$$

$$=\ln\left[1+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{2(\sqrt{n}+1)\left[1-\frac{1}{8n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+1+\frac{1}{8n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1}{\sqrt{16n^2-1}}\right.$$

$$\left.+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right]$$

$$=\ln\left[1+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{2(\sqrt{n}+1)\left(2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1}{\sqrt{16n^2-1}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right]$$

$$= \ln\left[1+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{16n^2-1}}-\frac{3}{\sqrt{16n^2-1}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right]$$

$$= \ln\left[1-\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{16n^2-1}(\sqrt{16n^2-1}+4n)}\right.$$

$$\left.-\frac{3}{\sqrt{16n^2-1}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right]$$

$$= \ln\left[1-\frac{3}{\sqrt{16n^2-1}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right]$$

$$= \ln[1+\alpha_n],$$

其中 $$\alpha_n = -\frac{3}{\sqrt{16n^2-1}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

于是 $\alpha_n \to 0$，且 n 充分大时有 $\alpha_n < 0$，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\sqrt{16n^2-1}}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 发散，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\alpha_n)$ 发散，从而原无穷乘积发散.

【3097】 $$\left(1+\frac{1}{1^a}\right)\left(1-\frac{1}{2^a}\right)^2\left(1+\frac{1}{3^a}\right)\left(1+\frac{1}{4^a}\right)$$
$$\times\left(1-\frac{1}{5^a}\right)^2\left(1+\frac{1}{6^a}\right)\cdots.$$

解　令

$$q_1 = 1+\frac{1}{1^a}, q_2 = \left(1-\frac{1}{2^a}\right)^2,$$

$$q_3 = 1+\frac{1}{3^a}, q_4 = 1+\frac{1}{4^a},$$

$$q_5 = \left(1-\frac{1}{5^a}\right)^2, q_6 = 1+\frac{1}{6^a},\cdots.$$

设　$q_n = 1+\alpha_n$，

于是 $$\alpha_1 = \frac{1}{1^a}, \alpha_2 = -\frac{2}{2^a}+\frac{1}{2^{2a}},$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{3^a}, \alpha_4 = \frac{1}{4^a},$$

$$\alpha_5=-\frac{2}{5^a}+\frac{1}{5^{2a}},\alpha_6=\frac{1}{6^a},\cdots,$$

1° 当 $a>1$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|=\frac{1}{1^a}+\left(\frac{2}{2^a}-\frac{1}{2^{2a}}\right)+\frac{1}{3^a}+\frac{1}{4^a}+\left(\frac{2}{5^a}-\frac{1}{5^{2a}}\right)+\frac{1}{6^a}+\cdots, \quad ①$$

收敛，于是 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 绝对收敛.

2° 当 $a\leqslant 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}q_n \not\to 1$，于是 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 发散.

3° 当 $0<a\leqslant 1$ 时，将原无穷乘积改写为

$$\left(1+\frac{1}{1^a}\right)\left(1-\frac{1}{2^a}\right)\left(1-\frac{1}{2^a}\right)\left(1+\frac{1}{3^a}\right)\left(1+\frac{1}{4^a}\right)\left(1-\frac{1}{5^a}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5^a}\right)\left(1+\frac{1}{6^a}\right)\left(1+\frac{1}{7^a}\right)\left(1-\frac{1}{8^a}\right)\left(1-\frac{1}{8^a}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{9^a}\right)\cdots.$$

我们令

$$p_1=1+\frac{1}{1^a},p_2=1-\frac{1}{2^a},p_3=1-\frac{1}{2^a},$$

$$p_4=1+\frac{1}{3^a},p_5=1+\frac{1}{4^a},p_6=1-\frac{1}{5^a},$$

$$p_7=1-\frac{1}{5^a},p_8=1+\frac{1}{6^a},p_9=1+\frac{1}{7^a},\cdots.$$

设 $p_n=1+\beta_n,n=1,2,3,\cdots,$

于是
$$\beta_n=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+3k)^a}, & n=4k+1,\\ -\dfrac{1}{(2+3k)^a}, & n=4k+2 \text{ 或 } n=4k+3,\\ \dfrac{1}{(3+3k)^a}, & n=4k+4,k=0,1,2,\cdots.\end{cases}$$

现考察如下级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(1+3k)^a}-2\frac{1}{(2+3k)^a}+\frac{1}{(3+3k)^a}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}b_k,$$

的收敛性，其中

$$b_k = \frac{1}{(1+3k)^a} - \frac{2}{(2+3k)^a} + \frac{1}{(3+3k)^a}.$$

于是

$$\begin{aligned} b_k &= \left[\frac{1}{(1+3k)^a} - \frac{1}{(2+3k)^a}\right] \\ &\quad - \left[\frac{1}{(2+3k)^a} - \frac{1}{(3+3k)^a}\right] \\ &= \frac{a}{(3k+1+\theta_1)^{a+1}} - \frac{a}{(3k+2+\theta_2)^{a+1}} \\ &= \frac{a(a+1)}{[3k+1+\theta(1+\theta_2-\theta_1)]^{a+2}} \cdot (1+\theta_2-\theta_1), \end{aligned}$$

其中 $0<\theta_1<1, 0<\theta_2<1, 0<\theta<1$. 显然，令 $\delta = 1+\theta_2-\theta_1$，有 $0<\delta<2$，且

$$\theta(1+\theta_2-\theta_1) = \theta\delta \in (0,2).$$

因而

$$0 < b_k = \frac{a(a+1)}{(3k+1+\theta\delta)^{a+2}} \cdot \delta \leqslant \frac{2a(a+1)}{(3k+1)^{a+2}}.$$

由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)^{a+2}}$ 的收敛性知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ 收敛，于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n$ 收敛，但 β_n 变号，从而还需考察 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n^2$，易知

$$\beta_n^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+3k)^{2a}}, & n = 4k+1, \\ \dfrac{1}{(2+3k)^{2a}}, & n = 4k+2 \text{ 或 } n = 4k+3, \\ \dfrac{1}{(3+3k)^{2a}}, & n = 4k+4, k = 0,1,2,\cdots. \end{cases}$$

于是

$$\frac{1}{\left(\frac{3}{4}n+\frac{9}{4}\right)^{2a}} < \beta_n^2 < \frac{1}{\left(\frac{3}{4}n+\frac{1}{4}\right)^{2a}}, n = 1,2,3,\cdots.$$

当 $0 < a \leqslant \frac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{4}n+\frac{9}{4}\right)^{2a}}$ 发散，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n^2$ 发散，因此，$\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 发散，故 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ 也发散.

当$\frac{1}{2}<a\leqslant 1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{3}{4}n+\frac{1}{4}\right)^{2a}}$收敛，于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n^2$收敛，故$\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$收敛，因此，$\prod\limits_{n=1}^{\infty}q_n$收敛，又由①式知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$发散，于是当$\frac{1}{2}<a\leqslant 1$时，$\prod\limits_{n=1}^{\infty}q_n$条件收敛.

【3098】 证明：虽然级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots,$$

发散，但是乘积

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots,$$

收敛.

证 设

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots. \qquad ①$$

的通项为u_n，则

$$u_{2k-1}=\frac{1}{\sqrt{k+1}}+\frac{1}{k+1},u_{2k}=-\frac{1}{\sqrt{k+1}},k=1,2,3,\cdots.$$

令 $a_k=u_{2k-1}+u_{2k}=\frac{1}{k+1}$,

显然$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$发散，于是原级数①发散，设

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots, \qquad ②$$

无穷乘积对应的级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+u_n)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n,$$

其中 $v_n=\ln(1+u_n)$.

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$,

且　$$v_{2k-1}=\ln(1+u_{2k-1})=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k+1}}+\frac{1}{k+1}\right),$$

$$v_{2k}=\ln(1+u_{2k})=\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right),k=1,2,\cdots.$$

若设 $b_k=v_{2k-1}+v_{2k}$,

则　$$b_k=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k+1}}+\frac{1}{k+1}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

$$=\ln\left(1-\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}}\right).$$

因此,级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$ 收敛,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛.从而,无穷乘积②收敛.

【3099】　证明:虽然两个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\qquad与\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$$

发散,但是乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$ 收敛,式中

$$\alpha_n=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{k}}, & 若\ n=2k-1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k\sqrt{k}}, & 若\ n=2k,\end{cases}$$

证　设 $a_k=\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k}$,

则　$$a_k=\frac{1}{k}+\frac{1}{k\sqrt{k}},k=1,2,3,\cdots.$$

由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k\sqrt{k}}$ 收敛,而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}$ 发散,于是 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 发散,从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 发散,又设

$$b_k=\alpha_{2k-1}^2+\alpha_{2k}^2,$$

有　$$b_k=\left(\frac{1}{k}\right)+\left(\frac{1}{k}+\frac{2}{k\sqrt{k}}+\frac{3}{k^2}+\frac{3}{k^2\sqrt{k}}+\frac{1}{k^3}\right)$$

$$=\frac{2}{k}+\frac{2}{k\sqrt{k}}+\frac{3}{k^2}+\frac{2}{k^2\sqrt{k}}+\frac{1}{k^3}$$

$$= \frac{2}{k} + o\left(\frac{1}{\sqrt{k^3}}\right).$$

因为$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k^3}}$收敛,$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}$发散,我们有$\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$发散,于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$发散.

设与无穷乘积$\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$对应的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\alpha_n)$,

令 $v_n = \ln(1+\alpha_n), n = 1,2,3,\cdots,$

设 $c_k = v_{2k-1} + v_{2k} = \ln(1+\alpha_{2k-1}) + \ln(1+\alpha_{2k})$

$$= \ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k\sqrt{k}}\right)$$

$$= \ln\left[1-\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]= \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right),$$

于是,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$收敛,又

$$\lim_{n\to\infty}v_n = \ln(1+\alpha_n) = 0,$$

从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛,故原无穷乘积$\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$收敛.

【3100】 设

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}.$$

(黎曼 ζ 函数),$p_n(n = 1,2,\cdots)$为素数的序列,证明:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \zeta(x).$$

解 当$x>1$时,黎曼函数收敛,于是我们设$x>1$,有

$$\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \frac{1}{p_n^x}+\frac{1}{(p_n^2)^x}+\cdots+\frac{1}{(p_n^m)^x}+\cdots.$$

又 $$\prod_{p_n\leqslant N}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = 1+\frac{1}{n_1^x}+\frac{1}{n_2^x}+\cdots,$$

其中,$N\in \mathbb{N}$,$n_1,n_2,\cdots$是整数,它不包含超过N的素因子,显然$1,2,\cdots,N$这种整数全被包含在$n_1,n_2,\cdots$之中,因此

$$\left|\zeta(x)-\prod_{p_n\leqslant N}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}\right|$$

$$=\left|\zeta(x)-1-\frac{1}{n_1^x}-\frac{1}{n_2^x}-\cdots\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{(N+1)^x}+\frac{1}{(N+2)^x}+\cdots\to 0,(n\to\infty)$$

取极限有 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}=\zeta(x),(x>1)$.

【3101】　证明:乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ 发散(欧拉),其中 $p_n(n=1,2,\cdots)$ 为素数的序列.

证　因为

$$\prod_{p_n\leqslant N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}>\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n},$$

当 $N\to+\infty$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$ 发散,于是 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}$ 发散,且其值为 $+\infty$,从而 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$ 发散于零,又 $\frac{1}{p_n}>0$,始终不变号,于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ 发散.

【3102】　令 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$,且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+C}}\right)(C>0).$$

证明:$a_n=O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)$.

提示:研究 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n n^p=a_1\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p$.

解　今考察无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$,其中 $p_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p$,考察它对应级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln p_n$,而

$$\ln p_n = \ln\frac{a_{n+1}}{a_n} + p\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= -\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} + p\left[\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$= -\ln(1+\Delta_n) + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= -\Delta_n + O(\Delta_n^2) + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

其中 $\Delta_n = \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right), (\varepsilon > 0).$

于是 $\ln p_n = -\frac{p}{n} + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$

由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln p_n$收敛，从而$\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$收敛，记$\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n = k_0$，从而$k_0 \neq 0$，且$k_0$为一有限正数，设

$$P_N = a_1\prod_{n=1}^{\infty}p_n,$$

于是 $P_N \to a_1 k_0 > 0, \quad (N\to\infty).$

又由 $P_N = a_1\prod\limits_{n=1}^{N}\frac{a_{n+1}}{a_n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p = a_{N+1}\prod\limits_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p,$

注意到 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \beta_n,$

其中 $\beta_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$

从而当N充分大时，有

$$\ln\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p$$

$$= p\sum_{n\leqslant N}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = p\sum_{n\leqslant N}\left(\frac{1}{n}+\beta_n\right)$$

$$= p\left[\ln N + C + O\left(\frac{1}{N}\right) + \sum_{n=1}^{N}\beta_n\right]$$

$$= p\left[\ln N + C + B + O\left(\frac{1}{N}\right)\right]$$

$$= p\left[\ln N + C_0 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right],$$

其中 C 为 Euler 数，$C>0$，$B=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$ 是一常数，

$$\sum_{n=1}^{N}\beta_n = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n + O\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right) = B + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

$$C_0 = C + B,$$

故
$$\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p = e^{p\left[\ln N + C_0 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right]} = N^p \cdot G_N,$$

其中
$$G_N = e^{C_0 p + O\left(\frac{1}{N}\right)} \to e^{C_0 p} > 0, (N\to\infty).$$

于是
$$0 < a_1 k_0 = \lim_{N\to\infty} P_N = \lim_{N\to\infty}\left[a_{N+1}\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p\right]$$
$$= \lim_{N\to\infty}[a_{N+1}N^p G_N]$$
$$= \lim_{N\to\infty}(a_{N+1}N^p)\cdot\lim_{N\to\infty}G_N. \qquad ①$$

上述运算是合理的，这是因为

$$\lim_{N\to\infty}G_N = e^{C_0 p} > 0,$$

而
$$a_{N+1}N^p = \frac{P_N}{G_N},$$

于是
$$\lim_{N\to\infty}(a_{N+1}N^p) = \frac{a_1 k_0}{e^{C_0 p}}.$$

也就是①式各极限存在，同时 a_{N+1} 与 $\frac{1}{N^p}$ 为同级无穷小量或 a_N 与 $\frac{1}{(N+1)^p}$ 为同级无穷小量，又

$$\frac{1}{(N-1)^p} \sim \frac{1}{N^p},$$

于是 $a_N \sim \frac{1}{N^p}$，即 N 充分大时，有

$$a_N = O\left(\frac{1}{N^p}\right).$$

【3103】　用沃利斯公式证明：

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

证 由沃利斯公式

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{\pi}{2},$$

有 $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}.$$

于是 $$\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\sim\frac{2}{\pi(2n+1)}.$$

上式两端开方有

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

【3104】 证明:当 $n\to\infty$ 时,表达式

$$a_n=\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

具有非零极限 A.

由此推导出斯特林公式:

$$n!=An^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}(1+\varepsilon_n),$$

其中$\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0, A=\sqrt{2\pi}$.

提示:未知极限表示成无穷乘积:

$$A=\lim_{n\to\infty}a_n=a_1\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

利用沃利斯公式确定常数 A.

证 由题设有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e},$$

首先证明不等式

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}. \qquad ①$$

事实上,由于

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2x\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\cdots\right),$$

于是令 $x=\dfrac{1}{2n+1}$，有

$$\ln\frac{n+1}{n}$$

$$=\frac{2}{2n+1}\left[1+\frac{1}{3(2n+1)^2}+\frac{1}{5(2n+1)^4}+\cdots\right],$$

即

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=1+\frac{1}{3(2n+1)^2}+\frac{1}{5(2n+1)^4}+\cdots.$$

上式右端大于 1，小于

$$1+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right]$$

$$=1+\frac{1}{12n(n+1)},$$

于是

$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{12n(n+1)}.$$

从而

$$\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<\mathrm{e}^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

根据上述不等式，有

$$0<a_{n+1}<a_n,n=1,2,\cdots,$$

$$a_n\mathrm{e}^{-\frac{1}{12n}}<a_{n+1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

于是$\{a_n\}$为单调递减且有下界的数列，因而有有限极限 A，又数列$\{a_n\mathrm{e}^{-\frac{1}{12n}}\}$单调递增且有上界

$$a_n\mathrm{e}^{-\frac{1}{12n}}<a_n<a_1,$$

从而有极限，又由

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{12n}}\to 1,(n\to\infty).$$

因此这两个数列有同一极限 A.

又　　对任意的 $n\in IN$，

有　　$a_n\mathrm{e}^{-\frac{1}{12n}}<A<a_0$.

于是　　存在 $\theta\in(0,1)$，得 $A=a_n e^{-\frac{\theta}{12n}}$

或　　$a_n=Ae^{\frac{\theta}{12n}}$.

因此　　$\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}=Ae^{\frac{\theta}{12n}}$,

即　　$n!=An^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{\theta}{12n}}$，$(\theta=\theta(n),0<\theta<1)$.

也就是　　$n!=An^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}(1+\varepsilon_n)$,

其中　　$\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$.

由沃利斯公式

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2,$$

及 $n!$ 的表达式有

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{[(2n)!!]^2}{(2n-1)!!}\right\}^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right\}^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{2^{2n}A^2n^{2n+1}e^{-2n}e^{\frac{\theta}{6n}}}{A\cdot 2^{2n+\frac{1}{2}}n^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}e^{\frac{\theta}{24n}}}\right\}^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}A^2\cdot\frac{n}{2}e^{\frac{\theta}{4n}}=\frac{A^2}{4},$$

故　　$A^2=2\pi$,

即　　$A=\sqrt{2\pi}$.

从而有斯特林格公式

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}},\theta\in(0,1).$$

【3105】　根据欧拉定义，γ 函数 $\Gamma(x)$ 用以下公式确定：

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

根据这个公式，

(1) 把函数 $\Gamma(x)$ 表示成无穷乘积；

(2) 证明 $\Gamma(x)$ 对于不等于负整数的一切实数 x 均有意义；

(3) 推导出性质：$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$；

(4) 对于正整数 n 得出 $\Gamma(n)$ 值.

解 (1) 由

$$\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

$$=\frac{n^x}{x}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{1}\right)^x\left(1+\frac{1}{2}\right)^x\cdots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^x\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

$$\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x},$$

有
$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}.$$

(2) 由(1),$x\neq-n,n\in\mathbb{N}$,即当 x 为非负整数时,$\Gamma(x)$ 有(1) 的无穷乘积形式. 设

$$p_n=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}=1+\alpha_n,n=1,2,\cdots,$$

其中
$$\alpha_n=\frac{x(x-1)}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛,故无穷乘积

$$\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}p_n=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}},$$

绝对收敛.

于是 $\Gamma(x)$ 对 $x\neq-n(n=0,1,2,\cdots)$ 的一切实数 x 皆有意义.

(3) 由 $\dfrac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!n^{x+1}}{(x+1)\cdots(x+n+1)}}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!n^{x}}{x(x+1)\cdots(x+n)}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n!n^{x+1}}{(x+1)\cdots(x+n+1)}}{\dfrac{n!n^{x}}{x(x+1)\cdots(x+n)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{x+n+1}=x,$$

于是 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

(4) 令 $x=n-1$,有

$$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)=(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)$$
$$=\cdots=(n-1)!.$$

【3106】 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 严格可积,且

$$\delta_n=\frac{b-a}{n},f_{in}=f(a+i\delta_n)\qquad(i=1,2,\cdots).$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{n}(1+\delta_n f_{in})=e^{\int_a^b f(x)dx}$.

证 令 $p_n=\prod\limits_{i=1}^{n}(1+\delta_n f_{in})$,

有 $$\ln p_n=\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\delta_n f_{in})=\sum_{i=1}^{n}[f_{in}\delta_n+O(\delta_n^2)]$$
$$=\sum_{i=1}^{n}f_{in}\delta_n+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

于是 $$\lim_{n\to\infty}\ln p_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n}f_{in}\delta_n+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}=\int_a^b f(x)dx,$$

即 $$\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}(1+\delta_n f_{in})=e^{\int_a^b f(x)dx}.$$

【3107】 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=0}^{n-1}(a+ib)}}{\dfrac{1}{n}\prod\limits_{i=0}^{n-1}(a+ib)}=\frac{2}{e},\text{其中 } a>0,b>0.$$

证 设 $t=\dfrac{b}{a}$,则 $t>0$,于是

$$S_n=\frac{\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1}(a+ib)}}{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(a+ib)}=\frac{\sqrt[n]{a^n}\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1}(1+it)}}{\frac{a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(1+it)}$$

$$=\frac{\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1}(1+it)}}{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(1+it)},$$

又当 n 充分大时有

$$\sum_{i=0}^{n-1}(1+it)=n+t\sum_{i=0}^{n-1}i=n+\frac{t}{2}n(n-1)$$

$$=\frac{t}{2}n^2+O(n).$$

令　$$Q_n=\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1}(1+it)},$$

由　$$\ln Q_n\ \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln(1+it)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left[\frac{1+it}{1+nt}(1+nt)\right]$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln(1+nt)+\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\frac{1+it}{1+nt}$$

$$=\ln(1+nt)+\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln(1-\Delta_i),$$

其中　$$\Delta_i=1-\frac{1+it}{1+nt}=\frac{(n-i)t}{1+nt},i=0,1,2,\cdots,n-1.$$

进一步　$$\ln Q_n=\ln(nt)+\ln\left(1+\frac{1}{nt}\right)+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln\left(1-\frac{t}{1+nt}j\right)$$

$$=\ln(nt)+O\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{tj}{1+nt}\right)^k$$

$$=\ln(nt)+O\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{t}{1+nt}\right)^k\sum_{j=1}^{n}j^k$$

$$= \ln(nt) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{t}{1+nt}\right)^k \cdot \left[\frac{1}{k+1}n^{k+1} + O(n^k)\right]$$

$$= \ln(nt) + O\left(\frac{1}{n}\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}\left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k$$

$$+ O\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k\right)$$

$$= \ln(nt) - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k + O\left(\frac{1}{n}\ln n\right)$$

$$= \ln(nt) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}\left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k + O\left(\frac{1}{n}\ln n\right)$$

$$= \ln(nt) + \ln\left(1 - \frac{nt}{1+nt}\right)$$

$$+ \left(\frac{1+nt}{nt}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}\left(\frac{nt}{1+nt}\right)^{k+1} + O\left(\frac{1}{n}\ln n\right)$$

$$= \ln(nt) + \ln\frac{1}{1+nt}$$

$$+ \frac{1+nt}{nt}\left[\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s}\left(\frac{nt}{1+nt}\right)^s - \frac{nt}{1+nt}\right] + O\left(\frac{1}{n}\ln n\right)$$

$$= \ln(nt) - \ln(1+nt)$$

$$- \frac{1+nt}{nt}\ln\left(1 - \frac{nt}{1+nt}\right) - 1 + O\left(\frac{1}{n}\ln n\right)$$

$$= \ln(nt) - \ln(1+nt) - \ln\frac{1}{1+nt} - 1 + O\left(\frac{1}{n}\ln n\right)$$

$$= \ln(nt) - 1 + O\left(\frac{1}{n}\ln n\right),$$

于是 $\quad Q_n = \frac{nt}{e} \cdot e^{O\left(\frac{1}{n}\ln n\right)}.$

故 $$S_n=\frac{Q_n}{\frac{t}{2}n+O(1)}=\frac{\frac{nt}{e}\cdot e^{O(\frac{1}{n}\ln n)}}{\frac{t}{2}n+O(1)}=\frac{2}{e}\cdot\frac{e^{O(\frac{1}{n}\ln n)}}{1+O\left(\frac{1}{n}\right)},$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{e^{O(\frac{1}{n}\ln n)}}{1+O\left(\frac{1}{n}\right)}=\frac{2}{e}.$$

【3108】 设 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在区间 (a,b) 为连续函数，且 $|f_n(x)|\leqslant C_n(n=1,2,\cdots)$，其中级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛.

证明函数 $F(x)=\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n(x)](|f_n(x)|<1)$ 在区间 (a,b) 是连续函数.

证 1° $F(x)$ 在 $x\in(a,b)$ 上有定义.

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}C_n$ 收敛，于是 $\lim_{n\to\infty}C_n=0$，从而 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$，于是任意 $\delta>0$，存在 $N_0>0$，当 $n\geqslant N_0$ 时，有 $|f_n(x)|<\delta$ （设 $\delta\in(0,1)$），故我们只要研究乘积 $\prod_{n=N_0+1}^{\infty}[1+f_n(x)]$ 的收敛性即可.

设 $$\prod_{n=N_0+1}^{\infty}[1+f_n(x)]=\prod_{k=1}^{\infty}[1+g_k(x)], \qquad ①$$

其中 $g_k(x)=f_{N_0+k}(x),k=1,2,\cdots.$

令 $$G(x)=\prod_{k=1}^{\infty}[1+g_k(x)], \qquad ②$$

由于 $|g_n(x)|<\delta$，

于是 $1+g_n(x)>0.$

又 $|g_n(x)|\leqslant C_{N_0+n}$，

而 $\sum_{n=1}^{\infty}C_{N_0+n}$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$ 绝对收敛，于是无穷乘积 ② 绝对收敛，因为

$$F(x)=G(x)\prod_{n=1}^{N_0}[1+f_n(x)], \qquad ③$$

于是 $F(x)$ 收敛，即 $F(x)$ 在 (a,b) 上有定义.

2° $F(x)$ 在 (a,b) 上连续.

由 ③ 知只要 $G(x)$ 在 (a,b) 上连续即可.

因 $G(x)>0, x\in(a,b)$,

于是可令 $L(x)=\ln G(x)$,

有
$$L(x)=\ln G(x)=\ln\prod_{n=1}^{\infty}[1+g_n(x)]$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\ln[1+g_n(x)],$$

而
$$|g_n(x)|\leqslant C_{N_0+n}, C_{N_0+n}\to 0, (n\to\infty).$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1,$$

有 存在 $n_0>0$，当 $n>n_0$ 时，对任意的 $x\in(a,b)$，皆有
$$|\ln[1+g_n(x)]|\leqslant 2|g_n(x)|\leqslant 2C_{n+N_0}.$$

根据 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_{n+N_0}$ 的收敛性知，$L(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛，且每一项皆在 (a,b) 上连续，于是 $G(x)$ 在 (a,b) 上连续，因此，$F(x)$ 在 (a,b) 上连续.

【3109】 求函数
$$F(x)=\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n(x)],$$
的导数的表达式，$F'(x)$ 存在的充分条件是什么?

解 由题意可设
$$1+f_n(x)\neq 0, x\in(a,b), n=1,2,\cdots.$$

若在 (a,b) 内任意一点 x 上，皆有 $\{f_n(x)\}$ 绝对收敛，即
$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|<+\infty, x\in(a,b), \qquad ①$$

则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}[1+f_n(x)]$ 在 (a,b) 内收敛，且 $F(x)\neq 0$.

于是可令
$$G(x)=\ln|F(x)|, \qquad ②$$

对 ② 作形式求导有

$$G'(x) = \frac{F'(x)}{F(x)},$$

即 $$F'(x) = F(x)G'(x). \tag{③}$$

而 $$\begin{aligned} G'(x) &= \left(\ln\left|\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n(x)]\right|\right)' \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\ln|1+f_n(x)|\right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(\ln|1+f_n(x)|)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'_n(x)}{1+f_n(x)}, \end{aligned} \tag{④}$$

为使(4)式的运算有意义,我们有如下充分条件:

$f_n(x)$ 可导,且

$$|f'_n(x)| \leqslant C_n, \sum_{n=1}^{\infty}C_n < +\infty, x \in (a,b). \tag{⑤}$$

于是我们得一个充分条件:在条件①,⑤之下,$F(x)$ 在 (a,b) 内可导,且

$$F'(x) = F(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'_n(x)}{1+f_n(x)}, \tag{⑥}$$

设任意 $x_0 \in (a,b)$,取 a_1,b_1,使 $a < a_1 < x_0 < b_1 < b$,下证

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|. \tag{⑦}$$

在 (a_1,b_1) 上一致收敛,由条件①$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x_0)|$ 绝对收敛,由⑤式,当 $x \in (a_1,b_1)$ 时,有

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(x_0)| &= |f'_n(\xi_n)(x-x_0)| \\ &\leqslant (b_1 - a_1)C_n, \quad n = 1,2,\cdots, \end{aligned} \tag{⑧}$$

其中 ξ_n 介于 x_0 和 x 之间,由 $\sum_{n=1}^{\infty}C_n$ 收敛,知

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x) - f_n(x_0)|, \tag{⑨}$$

在 (a_1,b_1) 上一致收敛,从而级数⑦在 (a_1,b_1) 上一致收敛.

于是,存在 $N>0$,当 $n>N$ 时,对一切 $x\in(a_1,b_1)$,皆有

$$|f_n(x)|<\frac{1}{2}, \qquad ⑩$$

$$|\ln[1+f_n(x)]|\leqslant 2|f_n(x)|, \qquad ⑪$$

恒成立.

由 ⑩ 式与 ⑤ 式有,当 $n>N$ 时,对一切 $x\in(a_1,b_1)$,皆有

$$\left|\frac{f'_n(x)}{1+f_n(x)}\right|\leqslant 2C_n. \qquad ⑫$$

又由 ⑪ 式和 ⑫ 式及 ⑦ 在 (a_1,b_1) 的一致收敛性知,
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln|1+f_n(x)|$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{f'_n(x)}{1+f_n(x)}$,
皆在 (a_1,b_1) 上一致收敛,从而 ④ 式中的逐项求导是合理的,即 $G(x)$ 在 (a_1,b_1) 上可导,且 ④ 式成立,由 ② 式知

$$|F(x)|=e^{G(x)}, \qquad ⑬$$

又由 ⑧ 式有:当 $x\in(a_1,b_1)$ 时

$$|f(x)|\leqslant(b_1-a_1)C_n+|f_n(x_0)|=d_n, n=1,2,\cdots.$$

由已知条件 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}d_n$ 收敛,及 3108 题结论知 $F(x)$ 在 (a_1,b_1) 上连续.

因为 $F(x)\neq 0$,于是 $F(x)>0, x\in(a_1,b_1)$,从而 ⑬ 式为

$$F(x)=e^{G(x)}, x\in(a_1,b_1), \qquad ⑭$$

或 $\quad F(x)<0, x\in(a_1,b_1)$,

这时 ⑬ 式为

$$F(x)=-e^{G(x)}, x\in(a_1,b_1), \qquad ⑮$$

在 ⑭ 式成立的情形,由 $G(x)$ 在 (a_1,b_1) 上可导有 $F(x)$ 在 (a_1,b_1) 上可导,且

$$F'(x)=e^{G(x)}G'^{(x)}=F(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'_n(x)}{1+f_n(x)}.$$

在 ⑮ 式成立的情形,由 $G(x)$ 在 (a_1,b_1) 上可导有 $F(x)$ 在 (a_1,b_1) 上可导,且

$$F'(x)=-e^{G(x)}G'(x)=F(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'_n(x)}{1+f_n(x)}.$$

总之，在(a_1, b_1)上⑥式必成立，特别在点x_0成立.

综上所述，若条件①和条件⑤成立，且设

$$1+f_n(x)\neq 0,\qquad x\in(a,b),\qquad n=1,2,\cdots,$$

则在(a,b)内$F'(x)$存在且有公式⑥成立.

【3110】 证明：若$0<x<y$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)}=0.$$

证 令

$$p_n=\frac{x+n}{y+n},n=1,2,3,\cdots.$$

由于$0<x<y$，于是$0<p_n<1$，由题意，我们要证明无穷乘积$\frac{x}{y}\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$发散到零，因为部分乘积$\prod\limits_{k=1}^{n}p_k$是正的递减的，于是只要证明它是发散的就够了，令

$$p_n=1+\alpha_n,$$

则
$$\alpha_n=p_n-1=\frac{1+\frac{x}{n}}{1+\frac{y}{n}}-1$$

$$=\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right)^{-1}-1$$

$$=\left(1+\frac{x}{n}\right)\left[1-\frac{y}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1$$

$$=\left[1-\frac{y-x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1$$

$$=-\frac{y-x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

于是当n充分大时，α_n保号，由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{y-x}{n}$发散，有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$发散，因此，原无穷乘积发散，它发散到零，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{y}\prod_{k=1}^{n}\frac{x+k}{y+k}$$

$$= \frac{x}{y}\prod_{k=1}^{\infty} p_k = 0.$$

§10. 斯特林公式

当 n 值很大时,可用斯特林公式:

$$n! = \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}} \qquad (0 < \theta_n < 1),$$

计算 $n!$值.

利用斯特林公式,近似计算(3111 ~ 3117).

【3111】 lg100!.

解 $\lg 100! = \lg\{\sqrt{2\pi \cdot 100} \cdot 100^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta}{12\cdot 100}}\}$

$$= \frac{1}{2}(\lg 2 + \lg\pi + \lg 100) + 100\lg 100$$

$$- 100\lg e + \frac{\theta}{1200}\lg e$$

$$= \frac{1}{2}(0.3010 + 0.4971 + 2) + 200 - 100$$

$$\times 0.4343 + 0.004\theta$$

$$= 157.9691 + 0.0004\theta. (\theta \in (0,1)).$$

【3112】 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 1999$.

解 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 1999$

$$= \frac{2000!}{2^{1000} \cdot 1000!}$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi \cdot 2000} \cdot 2000^{2000} \cdot e^{-2000} \cdot e^{\frac{\theta_1}{24000}}}{2^{1000} \cdot \sqrt{2\pi \cdot 1000} \cdot 1000^{1000} \cdot e^{-1000} \cdot e^{\frac{\theta_2}{12000}}}$$

$$= 7.09 \cdot 10^{2866} \cdot e^{\frac{\theta}{12000}}$$

$$\approx 7.09 \times 10^{2866} \times \left(1 + \frac{\theta}{12000}\right).$$

其中 $\theta_1 \in (0,1), \theta_2 \in (0,1), |\theta| < 1.$

【3113】 $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 100}$.

解 原式 $\doteq \dfrac{100!}{2^{100}(50!)^2} = \dfrac{\sqrt{2\pi\cdot 100}\cdot 100^{100}\cdot e^{-100}\cdot e^{\frac{\theta_1}{1200}}}{2^{100}\cdot 100\pi\cdot 50^{100}\cdot e^{-100}\cdot e^{\frac{\theta_2}{300}}}$

$$= 0.0798e^{\frac{\theta}{300}} \approx 0.0798\left(1+\frac{\theta}{300}\right),$$

其中 $\theta_1 \in (0,1), \theta_2 \in (0,1), |\theta| < 1.$

【3114】 $C_{100}^{40}.$

解 $C_{100}^{40} = \dfrac{100!}{40!60!}$

$$= \frac{\sqrt{200\pi}\cdot 100^{100}\cdot e^{-100}\cdot e^{\frac{\theta_1}{1200}}}{\sqrt{2\pi\cdot 40}\cdot\sqrt{2\pi\cdot 60}\cdot 60^{60}\cdot 40^{40}\cdot e^{-100}\cdot e^{\frac{\theta_2}{480}+\frac{\theta_3}{720}}}$$

$$= 10^{28}\cdot 1.378e^{\frac{\theta}{288}} \approx 10^{28}\times 1.378\left(1+\frac{\theta}{288}\right),$$

其中 $\theta_1 \in (0,1), \theta_2 \in (0,1),$
$\theta_3 \in (0,1), |\theta| < 1.$

【3115】 $\dfrac{100!}{20!\cdot 30!\cdot 50!}.$

解 原式

$$= \frac{\sqrt{2\pi\cdot 100}\cdot 100^{100}\cdot e^{-100}\cdot e^{\frac{\theta_1}{1200}}}{\sqrt{2^3\pi^3\cdot 20\cdot 30\cdot 50}\cdot 20^{20}\cdot 30^{30}\cdot 50^{50}\cdot e^{-100}\cdot e^{\frac{\theta_2}{240}+\frac{\theta_3}{360}+\frac{\theta_4}{600}}}$$

$$= 10^{42}\times 4.792e^{\frac{\theta}{120}}$$

$$\approx 10^{42}\times 4.972\left(1+\frac{\theta}{120}\right),$$

其中 $\theta_1 \in (0,1), \theta_2 \in (0,1), \theta_3 \in (0,1),$
$\theta_4 \in (0,1), |\theta| < 1.$

【3116】 $\int_0^1 (1-x^2)^{50}dx.$

解 原式 $\xlongequal{\text{令 } x=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{101} t\,dt$

$$= \frac{(100)!!}{(101)!!} = \frac{2^{100}\cdot(50!)^2}{(101)!}$$

$$= \frac{2^{100} \cdot 100\pi \cdot 50^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_1}{300}}}{101 \cdot \sqrt{2\pi \cdot 100} \cdot 100^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_2}{1200}}}$$

$$= \frac{10\sqrt{\pi}}{101\sqrt{2}} e^{\frac{\theta}{300}} = 0.1241 e^{\frac{\theta}{300}}$$

$$= 0.1241\left(1 + \frac{\theta}{300}\right),$$

其中 $\theta_i \in (0,1), i = 1,2, |\theta| < 1.$

【3117】 $\int_0^{2\pi} \sin^{200} x dx.$

解 由

$$\int_0^{2\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi},$$

对每一部分分别作变量代换

$$x = t, x = t + \frac{\pi}{2},$$

$$x = t + \pi, x = t + \frac{3\pi}{2},$$

及 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt,$$

有 $$\int_0^{2\pi} \sin^{200} x dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{200} x dx.$$

由 2281 题结论和斯特林公式有

$$\int_0^{2\pi} \sin^{100} x dx = 4 \cdot \frac{(199)!!}{(200)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{200!}{2^{200}(100!)^2} \cdot 2\pi$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{2\pi \cdot 200} \cdot 200^{200} \cdot e^{-200} \cdot e^{\frac{\theta_1}{2400}}}{2^{200} \cdot 200\pi \cdot 100^{200} \cdot e^{-200} \cdot e^{\frac{\theta_2}{600}}}$$

$$= 0.355 \times e^{\frac{\theta}{600}} \approx 0.355\left(1 + \frac{\theta}{600}\right),$$

其中 $\theta_i \in (0,1), i = 1,2, |\theta| < 1.$

【3118】 推导出下列乘积的渐近公式:

$$(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1).$$

解　$(2n-1)!!=\frac{2n!}{2^n n!}=\frac{\sqrt{2\pi\cdot 2n}\cdot(2n)^{2n}e^{-2n}e^{\frac{\theta_1}{24n}}}{2^n\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n}\cdot e^{\frac{\theta_2}{12n}}}$

$=\sqrt{2}(2n)^n e^{-n+\frac{\theta}{12n}}$.

其中 $\theta_i\in(0,1), i=1,2, |\theta|<1$.

【3119】　若 n 很大，近似计算 C_{2n}^n.

解　$C_{2n}^n=\frac{2n(2n-1)\cdots(2n-n+1)}{n!}$

$=\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{\sqrt{2\pi\cdot n}\cdot(2n)^{2n}\cdot e^{-2n}\cdot e^{\frac{\theta_1}{24n}}}{2\pi n\cdot n^{2n}\cdot e^{-2n}\cdot e^{\frac{\theta_2}{6n}}}$

$=\frac{2^{2^n}}{\sqrt{n\pi}}e^{\frac{\theta}{6n}}$,

其中　$\theta_i\in(0,1), i=1,2,\cdots, |\theta|<1$.

【3120】　利用斯特林公式，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{\ln n^n}$.

解　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt[n^2]{\sqrt{2\pi n}}\cdot\sqrt[n]{n}\cdot e^{-\frac{1}{n}}e^{\frac{\theta}{12n^3}}\right]=1.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}}\cdot n\cdot e^{-1}\cdot e^{\frac{\theta}{12n^2}}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e}{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}}\cdot e^{\frac{\theta}{12n^2}}}=e.$

(3) 由 3118 题结论有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[2n]{2}\cdot 2n\cdot e^{-1}e^{\frac{\theta}{12n^2}}}=\frac{e}{2}.$$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{\ln n^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(\ln 2+\ln\pi+\ln n)+n\ln n-n+\frac{\theta}{12n}}{n\ln n}=1.$$

§11. 用多项式逼近连续函数

1. **拉格朗日插值公式**　拉格朗日多项式：

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}y_i$$

具有 $P_n(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots)$ 的性质.

2. **伯恩斯坦多项式**　若 $f(x)$ 在区间$[0,1]$是连续函数，则伯恩斯坦多项式：

$$B_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)C_n^ix^i(1-x)^{n-i},$$

当 $n\to\infty$ 时在区间$[0,1]$一致收敛于函数 $f(x)$.

【3121】　运用给定的数组，作出最低的 n 次幂的多项式 $P_n(x)$

x	-2	0	4	5
y	5	1	-3	1

$P_n(-1),P_n(1),P_n(6)$ 近似地等于多少?

解　由 $x_0=-2,x_1=0,x_2=4,x_3=5;y_0=5,y_1=1,y_2=-3,y_3=1$，有

$$P_3(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3.$$

以$(x_i,y_i),i=0,1,2,3$ 代入上式有

$$P_3(x)=1-\frac{55}{21}x-\frac{1}{14}x^2+\frac{5}{42}x^3,$$

$$P_3(-1)=1+\frac{55}{21}-\frac{1}{14}-\frac{5}{42}\approx 3.43,$$

$$P_3(1)=1-\frac{55}{21}-\frac{1}{14}+\frac{5}{42}\approx -1.57,$$

$$P_3(6)=1-\frac{110}{7}-\frac{18}{7}+\frac{180}{7}\approx 8.43.$$

【3122】 写出经过三个点 $A(x_0-h,y_{-1})$，$B(x_0,y_0)$，$C(x_0+h,y_1)$ 的抛物线方程式：

$$y=ax^2+bx+c.$$

解 将三点的坐标代入拉格朗日插入公式有

$$\begin{aligned}y=&\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{[(x_0-h)-x_0][(x_0-h)-(x_0+h)]}y_{-1}\\&+\frac{(x-x_0+h)(x-x_0-h)}{[x_0-(x_0-h)][x_0-(x_0+h)]}y_0\\&+\frac{(x-x_0+h)(x-x_0)}{[(x_0+h)-(x_0-h)][(x_0+h)-x_0]}y_1\\=&y_0+\frac{y_1-y_{-1}}{2h}(x-x_0)+\frac{y_1-2y_0+y_{-1}}{2h^2}\cdot(x-x_0)^2.\end{aligned}$$

【3123】 利用数值 $x_0=1,y_0=1;x_1=25,y_1=5;x_2=100,y_2=10$，推导出开方根：$y=\sqrt{x}\quad(1\leqslant x\leqslant 100)$ 的近似公式.

解 $$\begin{aligned}y\approx&\frac{(x-25)(x-100)}{(-24)\cdot(-90)}\cdot 1+\frac{(x-1)(x-100)}{24\cdot(-75)}\cdot 5\\&+\frac{(x-1)(x-25)}{99\cdot 75}\cdot 10\\=&0.808+0.193x-0.00101x^2,\end{aligned}$$

如 $x=4,y\approx 1.564$（实值为 2），

$x=9,y\approx 2.463$（实值为 3），

$x=16,y\approx 3.637$（实值为 4），

$x=36,y\approx 6.447$（实值为 6）.

误差较大.

【3124】 利用数值

$$\sin 0^\circ=0,\sin 30^\circ=\frac{1}{2},\sin 90^\circ=1,$$

推导出以下的近似公式：

$$\sin x^{\circ} \approx ax + bx^{3}, (0 \leqslant x \leqslant 90),$$

利用这个公式,近似计算:

$$\sin 20^{\circ}, \quad \sin 40^{\circ}, \quad \sin 80^{\circ}.$$

解 将 $x = 30^{\circ}, \sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}, x = 90^{\circ}, \sin 90^{\circ} = 1$ 代入近似公式 $\sin x^{\circ} \approx ax + bx^{3}$ 有

$$\begin{cases} 30a + 27000b = \frac{1}{2}, \\ 90a + 729000b = 1. \end{cases}$$

解之有 $a = \frac{5}{288}, b = -\frac{5}{288}\left(\frac{1}{150}\right)^{2}$.

于是 $\sin x^{\circ} \approx \frac{5x}{288}\left(1 - \left(\frac{x}{150}\right)^{2}\right)$.

由此我们有

$$\sin 20^{\circ} \approx 0.341, \quad \sin 40^{\circ} \approx 0.645,$$
$$\sin 80^{\circ} \approx 0.994.$$

查表有 $\sin 20^{\circ} = 0.3420, \quad \sin 40^{\circ} = 0.6428,$

$$\sin 80^{\circ} = 0.9848.$$

误差较小.

【3125】 取 $x = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$ 作为插值点,对函数 $f(x) = |x|$ 在区间$[-1,1]$作出拉格朗日插值多项式.

解 以 $x_i = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, y_i = 0, \frac{1}{2}, 1$ 代入拉格朗日多项式有

$$P(x) = \frac{x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^{2} - 1)}{\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}$$

$$+\frac{x\left(x + \frac{1}{2}\right)(x^{2} - 1)}{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}$$

$$+\frac{x(x-1)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)}{(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(-2)}\cdot 1$$

$$+\frac{x(x+1)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)}{1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2}\cdot 1$$

$$=\frac{x^2}{3}(7-4x^2),\ |x|\leqslant 1.$$

【3126】 用拉格朗日多项式代换函数 $y(x)$，近似计算 $\int_0^2 y(x)\mathrm{d}x$，其中

x	0	0.5	1	1.5	2
$y(x)$	5	4.5	3	2.5	5

解　$$y(x)\approx\frac{(x-0.5)(x-1)(x-1.5)(x-2)}{(-0.5)(-1)(-1.5)(-2)}\cdot 5$$

$$+\frac{x(x-1)(x-1.5)(x-2)}{0.5\cdot(-0.5)\cdot(-1)\cdot(-1.5)}\cdot 4.5$$

$$+\frac{x(x-0.5)(x-1.5)(x-2)}{1\cdot 0.5(-0.5)\cdot(-1)}\cdot 3$$

$$+\frac{x(x-0.5)(x-1)(x-2)}{1\cdot 5\cdot 1\cdot 0.5\cdot(-0.5)}\cdot 2.5$$

$$+\frac{x(x-0.5)(x-1)(x-1.5)}{2\cdot 1.5\cdot 1\cdot 0.5}\cdot 5$$

$$=\left(\frac{10}{3}x^4-\frac{50}{3}x^3+\frac{87.5}{3}x^2-\frac{62.5}{3}x+5\right)$$

$$+(-12x^4+54x^3-78x^2+36x)$$

$$+(12x^4-48x^3+57x^2-18x)$$

$$+\left(-\frac{20}{3}x^4+\frac{70}{3}x^3-\frac{70}{3}x^2+\frac{20}{3}x\right)$$

$$+\left(\frac{10}{3}x^4-10x^3+\frac{27.5}{3}x^2-2.5x\right)$$

$$= \frac{8}{3}x^3 - 6x^2 + \frac{4}{3}x + 5,$$

于是 $$\int_0^2 y(x)\mathrm{d}x \approx \int_0^2 \left(\frac{8}{3}x^3 - 6x^2 + \frac{4}{3}x + 5\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^4 - 2x^3 + \frac{2}{3}x^2 + 5x\right)\Big|_0^2$$

$$= \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}.$$

【3127】 作出函数 x, x^2, x^3 在区间 $[0,1]$ 的波恩斯坦多项式 $B_n(x)$.

解 1° $f(x) = x$,

则 $$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= x\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-k-1}$$

$$= x[x + (1-x)]^{n-1} = x.$$

2° $f(x) = x^2$,

则 $$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{n^2}C_n^1 x(1-x)^{n-1} + \frac{2^2}{n^2}C_n^2 x^2(1-x)^{n-2}$$

$$+ \frac{3^2}{n^2}C_n^3 x^3(1-x)^{n-3} + \cdots$$

$$+ \frac{(n-1)^2}{n^2}C_n^{n-1}x^{n-1}(1-x) + \frac{n^2}{n^2}C_n^n x^n$$

$$= \frac{1}{n}x(1-x)^{n-1} + \frac{2(n-1)}{n}x^2(1-x)^{n-2}$$

$$+ \frac{3}{n}\frac{(n-1)(n-2)}{2!}x^3(1-x)^{n-3} + \cdots$$

$$+ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-2)!}x^{n-1}(1-x) + x^n$$

$$= \frac{1}{n}(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1)x(1-x)^{n-1}$$

$$+\frac{2}{n}(C_{n-1}^1+C_{n-1}^2)x^2\cdot(1-x)^{n-2}$$

$$+\frac{3}{n}(C_{n-1}^2+C_{n-1}^3)x^3(1-x)^{n-3}+\cdots$$

$$+\frac{n-1}{n}(C_{n-1}^{n-2}+C_{n-1}^{n-1})x^{n-1}(1-x)$$

$$+x^n-\left[\frac{1}{n}C_{n-1}^1x(1-x)^{n-1}+\frac{2}{n}C_{n-1}^2x^2(1-x)^{n-2}\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{n-1}{n}C_{n-1}^{n-1}x^{n-1}(1-x)\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{k}{n}\cdot x^k(1-x)^{n-k}$$

$$-\frac{n-1}{n}x(1-x)\cdot\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^kx^k(1-x)^{n-k-2}$$

$$=x-\frac{n-1}{n}x(1-x)=x^2+\frac{x(1-x)}{n}.$$

3° $f(x)=x^3$

则 $$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^3}{n^3}C_n^kx^k(1-x)^k$$

$$=\frac{1^2}{n^2}C_{n-1}^0x(1-x)^{n-1}+\frac{2^2}{n^2}C_{n-1}^1x^2(1-x)^{n-2}$$

$$+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^2}C_{n-1}^{n-2}x^{n-1}(1-x)+x^n$$

$$=\frac{1^2}{n^2}(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1)x(1-x)^{n-1}$$

$$+\frac{2^2}{n^2}(C_{n-1}^1+C_{n-1}^2)x^2\cdot(1-x)^{n-2}+\cdots$$

$$+\frac{(n-1)^2}{n^2}(C_{n-1}^{n-2}+C_{n-1}^{n-1})x^{n-1}(1-x)+x^n$$

$$-\left[\frac{1^2}{n^2}C_{n-1}^1x(1-x)^{n-1}+\frac{2^2}{n^2}C_{n-1}^2x^2(1-x)^{n-2}\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^2}C_{n-1}^{n-1}x^{n-1}(1-x)\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$-\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} x(1-x)\left[\frac{1}{n-2} C_{n-2}^0 (1-x)^{n-2}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{n-2} C_{n-2}^1 x(1-x)^{n-3} + \cdots + \frac{n-1}{n-2} C_{n-2}^{n-2} x^{n-2}\right]$$

$$= x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} x(1-x)$$

$$\cdot \left[\frac{1}{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k}{n-2} C_{n-2}^k x^k (1-x)^{n-k-2}\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k x^k (1-x)^{n-2-k}\right]$$

$$= x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - \frac{(n-1)(n-2)x(1-x)}{n^2}$$

$$\cdot \left[\frac{x}{n-2} \sum_{k=0}^{n-3} C_{n-3}^k x^k (1-x)^{n-3-k} + 1\right]$$

$$= x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

$$-\frac{(n-1)(n-2)x(1-x)}{n^2}\left(\frac{x}{n-2} + 1\right)$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)x^3 + \frac{3}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2 + \frac{1}{n^2}x.$$

【3128】 对于在区间$[a,b]$指定的函数$f(x)$，写出波恩斯坦多项式$B_n(x)$的公式.

解 令$a+(b-a)y=x$，故当$0\leqslant y\leqslant 1$时$x\in[a,b]$，即

$$y=\frac{x-a}{b-a}, \qquad 1-y=\frac{b-x}{b-a},$$

$$f(x)=f(a+(b-a)y).$$

从而$f(x)$在$[a,b]$上的伯恩斯坦多项式为

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{k}{n}\right) C_n^k \frac{(x-a)^k (b-x)^{n-k}}{(b-a)^n}.$$

【3129】 在区间$[-1,1]$用波恩斯坦多项式$B_4(x)$逼近函数

$f(x)=\dfrac{|x|+x}{2}$. 作出函数 $y=\dfrac{|x|+x}{2}$ 和 $y=B_4(x)$ 的图形.

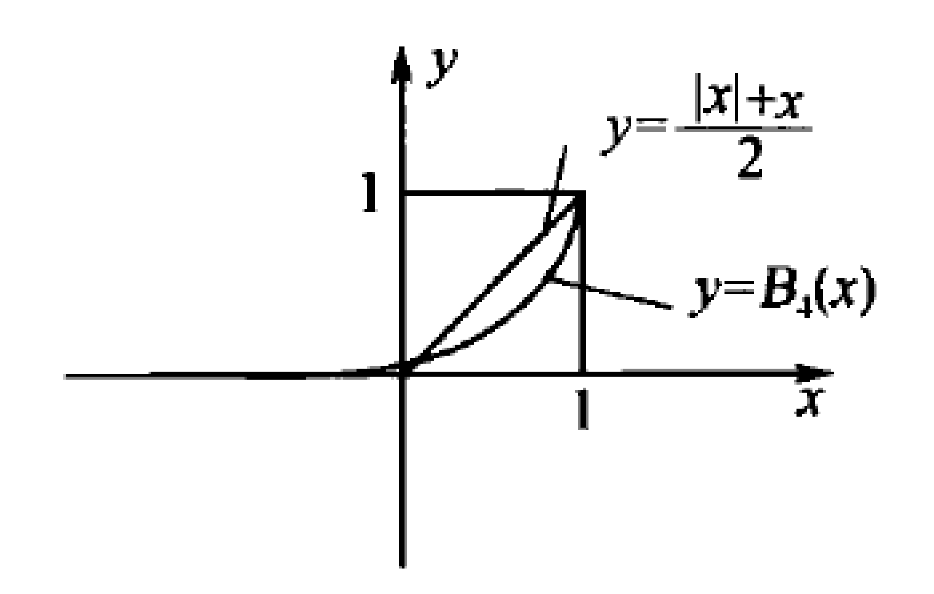
解　由 3128 结论知

$$B_4(x)=\sum_{k=0}^{4}f\left(-1+\frac{k}{2}\right)C_4^k\cdot\frac{(x+1)^k(1-x)^{4-k}}{2^4}$$

$$=\frac{1}{2}C_4^3\cdot\frac{(x+1)^3(1-x)}{4}+1\cdot C_4^4\cdot\frac{(x+1)^4}{2^4}$$

$$=\frac{1}{8}(1-x)(1+x)^3+\frac{1}{16}(1+x)^4,$$

函数 $y=\dfrac{|x|+x}{2}$ 和 $y=B_4(x)$ 的图形如 3129 题图所示.



3129 题图

注：$y=B_4(x)$，当 $x=-1$ 时，$B_4(-1)=0$，当 $x=1$ 时，$B_4(1)=1$，当 $x=0$ 时，$B_4(0)=\dfrac{3}{16}$，又 $y'=\dfrac{(1+x)^2}{4}(2-x)$，当 $x=-1$ 时，$y'=0$，当 $x\in(-1,1)$ 时，$y'>0$，于是 $B_4(x)$ 图形上升，又 $y''=\dfrac{3}{4}(1-x^2)\geqslant 0$，故图形向上凹.

【3130】　当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，用偶次波恩斯坦多项式逼近函数 $f(x)=|x|$.

解　由 3128 题结论有

$$B_{2n}(x)=\sum_{k=0}^{2n}\left|-1+\frac{k}{n}\right|C_{2n}^k\,\frac{(x+1)^k(1-x)^{2n-k}}{2^{2n}}$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{n-k}{n}C_{2n}^k(x+1)^k(1-x)^{2n-k}\right.$$

$$\left.+\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{k-n}{n}C_{2n}^k\cdot(x+1)^k(1-x)^{2n-k}\right\}$$

$$= \left(\frac{1-x^2}{4}\right)^n \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k}{n} C_{2n}^k \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n-k} \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k-n}{n} C_{2n}^k \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n-k} \right\}$$

$$= \left(\frac{1-x^2}{4}\right)^n \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_{2n}^{n-k} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{k} \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} C_{2n}^{n+k} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-k} \right\}$$

$$= \left(\frac{1-x^2}{4}\right)^n \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} C_{2n}^{n-k} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{k} \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} C_{2n}^{n+k} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{k} \right\},$$

由 $C_{2n}^{n-k} + C_{2n}^{n+k}$

$$= C_{2n}^{n-k}\left[1 + \frac{(n+k)(n+k+1)\cdots(n-k+1)}{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n+k)}\right]$$

$$= 2C_{2n}^{n-k},$$

有 $C_{2n}^{n-k} = C_{2n}^{n+k}$.

因此 $B_{2n}(x)$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1-x^2}{4}\right)^n \sum_{k=1}^{n} \left\{ kC_{2n}^{n-k}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^k\right]\right\}.$$

【3131】 写出下列函数的波恩斯坦多项式 $B_n(x)$：

$f(x) = e^{kx} \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$

解 $B_n(x)$

$$= \sum_{j=0}^{n} e^{k\left(a+(b-a)\frac{j}{n}\right)} C_n^j \frac{(x-a)^j (b-x)^{n-j}}{(b-a)^n}$$

$$= \frac{e^{ka}}{(b-a)^n} \sum_{j=0}^{n} e^{k\frac{(b-a)}{n}j} C_n^j (x-a)^j (b-x)^{n-j}$$

$$= \frac{e^{ka}}{(b-a)^n}\left[e^{\frac{b-a}{n}k}(x-a) + (b-x)\right]^n$$

$$= e^{ka}\left[e^{\frac{b-a}{n}k}\frac{x-a}{b-a} + \frac{b-x}{b-a}\right]^n$$

$$= e^{ka}\left[(e^{\frac{b-a}{n}k} - 1)\frac{x-a}{b-a} + \frac{b-x+x-a}{b-a}\right]^n$$

$$=e^{ka}\left[1+(e^{\frac{b-a}{n}k}-1)\frac{x-a}{b-a}\right]^n.$$

【3132】 计算函数 $f(x)=\cos x$ 在区间 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 的多项式 $B_n(x)$.

解 因为 $\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$, ①

由 3131 题结论，令 $a=-\frac{\pi}{2}$，$b=\frac{\pi}{2}$，并分别令 $k=i$，$k=-i$，得 e^{ix} 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的伯恩斯坦多项式 $B_n^{(1)}(x)$ 和 e^{-ix} 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的伯恩斯坦多项式 $B_n^{(2)}(x)$ 分别为：

$$B_n^{(1)}(x)=e^{-\frac{\pi}{2}i}\left[1+(e^{\frac{i\pi}{n}}-1)\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}\right)\right]^n$$

$$B_n^{(2)}(x)=e^{\frac{\pi}{2}i}\left[1+(e^{-\frac{i\pi}{n}}-1)\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}\right)\right]^n,$$

于是
$$\begin{aligned}B_n^{(1)}(x)&=e^{-\frac{\pi}{2}i}\left\{e^{\frac{\pi i}{2n}}\left[e^{-\frac{\pi i}{2n}}\right.\right.\\&\quad\left.\left.+(e^{\frac{\pi i}{2n}}-e^{-\frac{\pi i}{2n}})\cdot\left(\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\right]\right\}^n\\&=e^{-\frac{\pi}{2}i}e^{\frac{\pi}{2}i}\left[\cos\frac{\pi}{2n}-i\sin\frac{\pi}{2n}\right.\\&\quad\left.+2i\sin\frac{\pi}{2n}\left(\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\right]^n\\&=\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n.\end{aligned}$$

同理得
$$B_n^{(2)}(x)=\left(\cos\frac{\pi}{2n}-i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n.$$

由①式，$\cos x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上伯恩斯坦多项式 $B_n(x)$ 为

$$\begin{aligned}B_n(x)&=\frac{1}{2}\left[B_n^{(1)}(x)+B_n^{(2)}(x)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n\right.\end{aligned}$$

$$+\left(\cos\frac{\pi}{2n}-i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n\Bigg].$$

【3133】 证明:在区间$[-1,1]$上,$|x|=\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)$,其中

$$P_n(x)=1-\frac{1-x^2}{2}-\sum_{i=2}^{n}\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2i-3)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2i)}(1-x^2)^i.$$

证 $|x|=\sqrt{x^2}=\sqrt{1-t}$,其中 $t=1-x^2$,

又
$$\sqrt{1-t}=1+\frac{1}{2}(-t)$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-t)^n$$
$$=1-\frac{t}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)(-3)\cdots(-2n+3)}{n!2^n}(-1)^nt^n$$
$$=1-\frac{t}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdots(2n)}(-1)^{2n-1}t^n$$
$$=1-\frac{t}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}t^n,$$
$$-1<t<1. \qquad ①$$

当 $t=\pm1$ 时,上式右端级数为

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(\pm1)^n=\sum_{n=2}^{\infty}a_n.$$

而
$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2n+2}{2n-1}-1\right)=\frac{3}{2}>1,$$

于是$\sum\limits_{n=2}^{\infty}|a_n|$收敛,从而级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$收敛,因此由阿贝尔定理,①式当 $t=\pm1$ 时也成立,即

$$\sqrt{1-t}=1-\frac{t}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}t^n,$$
$$t\in[-1,1]. \qquad ②$$

故把 $t=1-x^2$ 代入,有

$$|x|=1-\frac{1-x^2}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(1-x^2)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} P_n(x), x \in [-1,1]. \quad ③$$

【3133.1】 设

$$f(x) \in C[a,b],$$

$$M_k = \int_a^b x^k f(x)\mathrm{d}x = 0, (k = 0,1,2,\cdots),$$

证明：当 $x \in [a,b]$ 时，$f(x) \equiv 0$.

证 因为 $f \in C[a,b]$，由 Weierstrass 定理，

$$任意 \varepsilon > 0, 存在 P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

有 $$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon, x \in [a,b].$$

于是 $$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f\cdot(f - P_n + P_n)\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b f\cdot(f-P_n)\mathrm{d}x + \int_a^b fP_n\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b f\cdot(f-P_n)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f||f-P_n|\mathrm{d}x \leqslant M\varepsilon,$$

其中 $M = \int_a^b |f|\mathrm{d}x$ 为常数.

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性知

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = 0,$$

于是 $$f^2(x) = 0, x \in [a,b],$$

即 $$f(x) = 0, x \in [a,b].$$

【3134】 设 $f(x)$ 为 2π 周期的连续函数，$a_n, b_n (n = 0,1,2,\cdots)$ 为它的傅里叶系数. 证明费叶尔三角多项式：

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{n}\right)(a_i\cos ix + b_i\sin ix),$$

在区间 $(-\pi,\pi)$ 一致收敛到函数 $f(x)$.

解 注：在所设条件下，只能断言：对任何 $\varepsilon > 0$，$\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon]$ 上一致收敛于 $f(x)$，一般不能推出 $\sigma_n(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上一致收敛于 $f(x)$，但若假设 $f(-\pi) = f(\pi)$，则 $\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

今把 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上函数值按周期为 2π 延拓到整个(—

$\infty,+\infty)$ 上,延拓后的函数仍记为 $f(x)$,设 $f(x)$ 的傅里叶级数部分和

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\left[\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}\cos m(u-x)\right]du$$

因为 $$2\sin\frac{v}{2}\cos mv=\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)v-\sin\left(m-\frac{1}{2}\right)v,$$
$$m=1,2,\cdots,n.$$

于是 $$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\frac{\sin(2n+1)\frac{u-x}{2}}{2\sin\frac{u-x}{2}}du$$
$$\xlongequal{\text{令 }u-x=t}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

又以周期为 2π 的函数 $F(u)$ 在长为 2π 的闭区间 $[\lambda,\lambda+2\pi]$ 上的积分 $\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi}F(u)du$ 与 λ 无关,从而上式右端的积分 $\int_{-\pi-x}^{\pi-x}$ 可换为 $\int_{-\pi}^{\pi}$. 又 $\int_{-\pi}^{\pi}=\int_{-\pi}^{0}+\int_{0}^{\pi}$,且在 $\int_{-\pi}^{0}$ 中作代换 $t=-s$,我们有

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

显然 $$\sigma_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k(x),$$

故 $$\sigma_n(x)=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\cdot\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt,$$

因为 $$2\sin\frac{t}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} [\cos kt - \cos(k+1)t]$$

$$= 1 - \cos nt = 2\sin^2 \frac{nt}{2},$$

于是 $$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] \cdot \left[\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt. \qquad ①$$

又在 ① 中令 $f(x) = 1$，则 $S_n(x) = 1$，故 $\sigma_n(x) = 1$，于是有

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \left[\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt = 1. \qquad ②$$

① − ② × $f(x)$ 有

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi} [f(x+t) - f(x) + f(x-t) - f(x)] \cdot \left[\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt, \qquad ③$$

由此，我们将有如下的结论

1° 对任何 $\varepsilon > 0$，$\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

2° 若又有 $f(-\pi) = f(\pi)$，则 $\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

1° 的证明：设 $\varepsilon > 0$，显然 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界，于是存在 $M > 0$，有

$$|f(x)| \leqslant M, x \in (-\infty, +\infty).$$

注意，延拓后的函数在点 $x = \pi, x = -\pi$ 可能不连续（可能有第一类间断点），但在 $(-\pi, \pi)$ 上连续，因此，在 $\left[-\pi + \frac{\varepsilon}{2}, \pi - \frac{\varepsilon}{2}\right]$ 上一致连续，于是对任给的 $\eta > 0$，存在 $\delta > 0$，对所有 x', x'' 为 $\left[-\pi, \frac{\varepsilon}{2}, \pi - \frac{\varepsilon}{2}\right]$ 上两点，当 $|x' - x''| \leqslant \delta$，有 |

$f(x')-f(x'')|<\frac{\eta}{2}$，令 $\tau=\min\left\{\delta,\frac{\varepsilon}{2}\right\}$，由 ③ 式有

$$\sigma_n(x)-f(x)$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\tau}[f(x+t)-f(x)+f(x-t)-f(x)]\left[\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt$$

$$+\frac{1}{2n\pi}\int_{\tau}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]\cdot\left[\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt$$

$$=I_1+I_2. \qquad ④$$

当 $0\leqslant t\leqslant\tau$，$-\pi+\varepsilon\leqslant x\leqslant\pi-\varepsilon$ 时，有

$$x+t\in\left[-\pi+\frac{\varepsilon}{2},\pi-\frac{\varepsilon}{2}\right],$$

$$x-t\in\left[-\pi+\frac{\varepsilon}{2},\pi-\frac{\varepsilon}{2}\right].$$

从而
$$|f(x+t)-f(x)|<\frac{\eta}{2},$$

$$|f(x-t)-f(x)|<\frac{\eta}{2}.$$

因此，当 $x\in[-\pi+\eta,\pi-\eta]$ 时，有

$$|I_1|\leqslant\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\tau}[|f(x+t)-f(x)|$$

$$+|f(x-t)-f(x)|]\cdot\left[\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt$$

$$<\frac{\eta}{2}\cdot\frac{1}{n\pi}\int_0^{\tau}\left[\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 dt<\frac{\eta}{2}. \qquad ⑤$$

又当 $t\in[\tau,\pi]$ 时

$$\left[\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2\leqslant\frac{1}{\sin^2\frac{\tau}{2}},$$

于是，当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时，有

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{2n\pi} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\tau}{2}} \int_\tau^\pi 4M\mathrm{d}t < \frac{2M}{n\sin^2 \frac{\tau}{2}}, \qquad ⑥$$

由 ④，⑤，⑥ 知，当 $-\pi+\varepsilon \leqslant x \leqslant \pi-\varepsilon$ 时，有

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{\eta}{2} + \frac{2M}{n\sin^2 \frac{\tau}{2}}, n = 1, 2, \cdots.$$

令
$$N = \left[\frac{4M}{\eta\sin^2 \frac{\tau}{2}}\right],$$
则当 $n > N$ 时，$\forall x \in [-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon]$，皆有

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta.$$

于是 $\sigma_n(x)$ 在$[-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

2° 的证明：因为 $f(-\pi) = f(\pi)$，于是前述延拓出去后的函数 $f(x)$ 是在$(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数，因此，在$[-2\pi, 2\pi]$ 上必一致连续，于是对任意的 $\eta > 0$，存在 $\tau > 0(\tau < \pi)$，则任何的 $x', x'' \in [-2\pi, 2\pi]$，当 $|x' - x''| < \tau$ 时，皆有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\eta}{2}.$$

和 1° 类似，首先对 τ，写出 ④ 式，显然 $0 \leqslant t \leqslant \tau$，$-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ 时，有 $x+t \in [-2\pi, 2\pi]$，$x-t \in [-2\pi, 2\pi]$，于是

$$|f(x+t) - f(x)| < \frac{\eta}{2},$$

$$|f(x-t) - f(x)| < \frac{\eta}{2}.$$

从而，当 $x \in [-\pi, \pi]$ 时 ⑤ 式成立，同样 ⑥ 式也成立，于是当 $n > N = \left[\frac{4M}{\eta\sin^2 \frac{\tau}{2}}\right]$ 时，对一切 $x \in [-\pi, \pi]$，恒有

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \eta.$$

故 $\sigma_n(x)$ 在$[-\pi, \pi]$ 上一致收敛.

注记：若 $f(-\pi) \neq f(\pi)$，则不一定有 $\sigma_n(x)$ 在$(-\pi, \pi)$ 上一致

收敛于 $f(x)$，比如设 $f(x)=x, x\in[-\pi,\pi]$，用反证法，设 $\sigma_n(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上一致收敛于 $f(x)=x$，由狄里克雷定理知

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x), x\in[-\pi,\pi], \tag{7}$$

其中

$$S(x)=\begin{cases}x, & x\in(-\pi,\pi),\\ \dfrac{f(-\pi+0)-f(\pi-0)}{2}=0, & x=\pm\pi.\end{cases}$$

故 $S(x)$ 在 $x=\pi$ 和 $x=-\pi$ 不连续，但由 ⑦ 式及 138 题结论知

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x)=S(x), x\in[-\pi,\pi]. \tag{8}$$

因为 $\sigma_n(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上一致敛于 $S(x)$，由 ⑧ 式，当 $x=\pm\pi$ 时，$\sigma_n(x)$ 也收敛于 $S(x)$，于是 $\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 $S(x)$，又 $\sigma_n(x)$ 是 x 的连续函数，$x\in[-\pi,\pi]$，因而极限函数 $S(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，与 $S(x)$ 在 $x=\pi$ 和 $x=-\pi$ 不连续矛盾，于是 $\sigma_n(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上不一致收敛于 $f(x)=x$.

【3135】 作出下列函数的费叶尔多项式 $\sigma_{2n-1}(x)$

$$f(x)=|x| \quad 当(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)时.$$

解 由 $f(x)=|x|$ 为偶函数有

$$b_n=0, \quad n=1,2,\cdots,$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1], \quad n=1,2,\cdots.$$

于是

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}, k=1,2,\cdots.$$

从而

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$